



KEMENTERIAN PENDIDIKAN MALAYSIA

MATEMATIK

Tingkatan 5

Sinus
Kosinus

CH_4

$$x^2 = ab^2$$

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

$\triangle ABD$

$$xy = a$$

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{c}} + c - \frac{b}{2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{x}^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{x}^2$$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{x}^2$$

tangen





RUKUN NEGARA

Bahawasanya Negara Kita Malaysia

mendukung cita-cita hendak;

Mencapai perpaduan yang lebih erat dalam kalangan
seluruh masyarakatnya;

Memelihara satu cara hidup demokrasi;

Mencipta satu masyarakat yang adil di mana kemakmuran negara
akan dapat dinikmati bersama secara adil dan saksama;

Menjamin satu cara yang liberal terhadap
tradisi-tradisi kebudayaannya yang kaya dan pelbagai corak;

Membina satu masyarakat progresif yang akan menggunakan
sains dan teknologi moden;

MAKA KAMI, rakyat Malaysia,
berikrar akan menumpukan
seluruh tenaga dan usaha kami untuk mencapai cita-cita tersebut
berdasarkan prinsip-prinsip yang berikut:

**KEPERCAYAAN KEPADA TUHAN
KESETIAAN KEPADA RAJA DAN NEGARA
KELUHURAN PERLEMBAGAAN
KEDAULATAN UNDANG-UNDANG
KESOPANAN DAN KESUSILAAAN**

(Sumber: Jabatan Penerangan, Kementerian Komunikasi dan Multimedia Malaysia)

KURIKULUM STANDARD SEKOLAH MENENGAH

MATEMATIK

TINGKATAN 5

PENULIS

Ng Seng How
Neo Geok Kee
Goh Jia Haur

EDITOR

Toh Shee Ying
Nurshamimi binti Jaafar

PEREKA BENTUK

Lim Ah Hong

ILUSTRATOR

Zaidi bin Sabran



Penerbitan Pelangi Sdn. Bhd.

2020



KEMENTERIAN PENDIDIKAN MALAYSIA

NO. SIRI BUKU: 0109

KPM2020 ISBN 978-967-2907-93-0

Cetakan Pertama 2020

© Kementerian Pendidikan Malaysia

Hak Cipta Terpelihara. Mana-mana bahan dalam buku ini tidak dibenarkan diterbitkan semula, disimpan dalam cara yang boleh dipergunakan lagi, ataupun dipindahkan dalam sebarang bentuk atau cara, baik dengan cara elektronik, mekanikal, penggambaran semula mahupun dengan cara perakaman tanpa kebenaran terlebih dahulu daripada Ketua Pengarah Pelajaran Malaysia, Kementerian Pendidikan Malaysia. Perundingan tertakluk kepada perkiraan royalti atau honorarium.

Diterbitkan untuk Kementerian Pendidikan Malaysia oleh:

PENERBITAN PELANGI SDN. BHD.

66, Jalan Pingai, Taman Pelangi,

80400 Johor Bahru,

Johor Darul Takzim

Tel: 07-3316288

Emel: pelangi@pelangibooks.com

Laman web: www.pelangibooks.com

Reka Letak dan Atur Huruf:

PENERBITAN PELANGI SDN. BHD.

Muka taip teks: Times New Roman

Saiz muka taip teks: 11 poin

Dicetak oleh:

Comtech Marketing Sdn. Bhd.

16, Jalan Bukit 2,

Kawasan MIEL,

Bandar Seri Alam,

81750 Masai, Johor Darul Ta'zim.

PENGHARGAAN

Penerbitan buku teks ini melibatkan kerjasama banyak pihak. Sekalung penghargaan dan terima kasih ditujukan kepada semua pihak yang terlibat:

- Jawatankuasa Penambahbaikan Pruf Muka Surat, Bahagian Sumber dan Teknologi Pendidikan, Kementerian Pendidikan Malaysia.
- Jawatankuasa Penyemakan Naskhah Sedia Kamera, Bahagian Sumber dan Teknologi Pendidikan, Kementerian Pendidikan Malaysia.
- Pegawai-pegawai Bahagian Sumber dan Teknologi Pendidikan dan Bahagian Pembangunan Kurikulum, Kementerian Pendidikan Malaysia.
- Pengerusi serta ahli panel penilaian dan peningkatan mutu.
- Bahagian Editorial dan Bahagian Produksi, terutamanya ilustrator dan pereka bentuk.
- *International GeoGebra Institute*
- Freepik.com
- Semua pihak yang terlibat secara langsung atau tidak langsung dalam penerbitan buku ini.

Kandungan

Pendahuluan

v

Simbol dan Rumus

vii

BAB 1

Ubahan

1

1.1 Ubahan Langsung

2

1.2 Ubahan Songsang

17

1.3 Ubahan Bergabung

26

Matriks

34

2.1 Matriks

36

2.2 Operasi Asas Matriks

42

BAB 2

BAB 3

Matematik Pengguna: Insurans

72

3.1 Risiko dan Perlindungan Insurans

74

Matematik Pengguna: Percukaian

94

4.1 Percukaian

96

BAB 4

BAB**5****Kekongruenan, Pembesaran
dan Gabungan Transformasi****122**

5.1	Kekongruenan	124
5.2	Pembesaran	133
5.3	Gabungan Transformasi	149
5.4	Teselasi	161

**Nisbah dan Graf Fungsi
Trigonometri****172**

6.1	Nilai Sinus, Kosinus dan Tangen bagi Sudut θ , $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$	174
6.2	Graf Fungsi Sinus, Kosinus dan Tangen	184

BAB**6****BAB****7****Sukatan Serakan Data Terkumpul****196**

7.1	Serakan	198
7.2	Sukatan Serakan	211

Pemodelan Matematik**226**

8.1	Pemodelan Matematik	228
-----	---------------------	-----

BAB**8**

Jawapan	244
Glosari	261
Rujukan	263
Indeks	264

Pendahuluan

Buku Teks Matematik Tingkatan 5 KSSM ini telah ditulis berdasarkan Dokumen Standard Kurikulum dan Pentaksiran (DSKP). Buku ini menepati matlamat Kurikulum Standard Sekolah Menengah (KSSM) bagi mengaplikasikan pengetahuan dan kemahiran matematik agar murid berupaya menangani cabaran dalam kehidupan harian, selaras dengan perkembangan sains dan teknologi, dan cabaran abad ke-21.

Struktur buku ini memberikan penekanan kepada KBAT, STEM, EMK dan penggunaan teknologi digital dalam memfokus kepada pendekatan Pembelajaran Berasaskan Inkuiri dan Pembelajaran Berasaskan Projek bagi merangsang minda dan intelektual murid supaya mampu bersaing di peringkat global.

Buku ini merangkumi 8 bab untuk diterokai dan setiap bab mengandungi Halaman Rangsangan, Kandungan dan Akhiran yang mempunyai ciri-ciri istimewa.

HALAMAN RANGSANGAN

Apakah yang akan anda pelajari?

Mengandungi Standard Kandungan yang terdapat dalam setiap bab.

Maslahat Bab Ini

Mendedahkan murid kepada aplikasi pembelajaran dalam kehidupan sebenar dan kerjaya yang berkaitan.

Tahukah Anda?

Memaparkan sejarah perkembangan matematik serta sumbangan tokoh matematik sebagai pengetahuan tambahan kepada murid.

Gerbang Istilah

Senarai kata kunci yang akan dipelajari berserta terjemahan dalam Bahasa Inggeris.



KANDUNGAN

MOBILISASI MINDA

Menerangkan konsep pembelajaran melalui penglibatan murid secara aktif dan menggalakkan komunikasi secara matematik melalui perbincangan.

PROJEK

Membolehkan murid mengapikasi pengetahuan yang telah dipelajari kepada masalah secara realiti dan membentangkan hasil semasa pembelajaran.

Latih Kendiri

Menguji pemahaman murid terhadap konsep yang dipelajari.



Merupakan soalan KBAT untuk menguji kemahiran berfikir aras tinggi murid.

KOTAK MEMORI

Membantu murid untuk mengingat rumus atau konsep yang pernah dipelajari.

Buletin Ilmiah

Mengandungi informasi matematik sebagai pengetahuan tambahan berkaitan dengan bab.

TiP Bestari

Memberikan tip atau panduan yang berkesan dan bermanfaat.

Aplikasi & Kerjaya

Mendedahkan penggunaan konsep yang dipelajari dalam kehidupan sebenar dan kerjaya yang berkaitan.

Khazanah Silam

Menerangkan sejarah yang berkaitan dengan tajuk sebagai pengetahuan tambahan.

Minda Kritis

Mengutarakan soalan yang merangsang minda murid berfikir di luar kotak.

i-Teknologi

Memberikan panduan kepada murid menggunakan alat teknologi dalam pembelajaran.

Medan Interaktif

Menggalakkan perbincangan antara guru dengan murid dan murid dengan murid.

Seronoknya Matematik!

Menggalakkan pembelajaran matematik yang menyeronokkan.

Semak Jawapan

Memberikan panduan kepada murid untuk menyemak jawapan.

Langkah Alternatif

Menunjukkan penyelesaian menggunakan jalan kira lain.

Oh! Malaysiaku

Mendedahkan pengetahuan yang berkaitan dengan tajuk dan perkembangan Malaysia.

AKHIRAN

Arena Rumusan

Mengandungi perkaitan antara konsep dalam peta pemikiran.

Refleksi

Membantu murid mengukur tahap penguasaan topik dalam bab.

Projek Mini

Mempertingkatkan kefahaman murid secara menyeluruh.

Latih Ekstensif

Berbentuk penilaian sumatif yang terdiri daripada Faham, Masteri dan Cabar.

Terokai Matematik

Aktiviti penerokaan konsep yang menyeronokkan dan santai.

Simbol dan Rumus

Simbol

=	sama dengan	sin	sinus
≠	tidak sama dengan	kos	kosinus
≈	hampir sama dengan	tan	tangen
>	lebih besar daripada	°	darjah
≧	lebih besar daripada atau sama dengan	'	minit (sudut)
<	kurang daripada	Σ	hasil tambah
≦	kurang daripada atau sama dengan	$\bar{x}$	min
Δ	segi tiga	σ^2	varians
∠	sudut	σ	sisihan piawai
∝	berubah secara langsung dengan		

Rumus

$$\text{Premium} = \frac{\text{Nilai muka polisi}}{\text{RMx}} \times \left(\frac{\text{Kadar premium}}{\text{per RMx}} \right)$$

Jumlah insurans yang harus dibeli

$$= \left(\frac{\text{Peratusan}}{\text{ko-insurans}} \right) \times \left(\frac{\text{Nilai boleh insurans}}{\text{harta}} \right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{Faktor skala, } k = \frac{PA'}{PA}$$

$$\text{Luas imej} = k^2 \times \text{Luas objek}$$

$$\text{Min, } \bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$\text{Varians, } \sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{x}^2$$

$$\text{Sisihan piawai, } \sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{x}^2}$$

Panduan Mengakses Bahan Digital dalam Buku Ini



Muat turun aplikasi percuma imbasan kod QR ke peranti mudah alih pintar anda. Imbas kod QR atau layari <http://bukutekskssm.my/Matematik/T5/Indeks.html> untuk mengakses bahan-bahan digital seperti:

- Lembaran kerja
- Fail GeoGebra
- Video

Kemudian, muat turun bahan-bahan tersebut untuk kegunaan luar talian.

Nota: Murid boleh muat turun perisian GeoGebra yang percuma untuk membuka fail yang berkenaan <http://www.geogebra.org/>

BAB 1

Ubahan

Apakah yang akan anda pelajari?

- Ubahan Langsung
- Ubahan Songsang
- Ubahan Bergabung

Maslahat Bab Ini

Konsep ubahan banyak digunakan dalam kehidupan seharian kita dan meluas dalam bidang sains dan matematik. Misalnya, mencari jarak yang dilalui dengan laju dalam masa tertentu, mengkaji hubungan antara kedalaman laut dengan tekanan air dan lain-lain.

Tahukah Anda?

Simbol $\propto$ diperkenalkan oleh William Emerson (1701-1782), seorang ahli matematik Inggeris, pada tahun 1768 dalam karyanya *The Doctrine of Fluxions*.

Untuk maklumat lanjut:



bit.do/TahukahAndaBab1



GERBANG ISTILAH



pemalar
pemboleh ubah
ubahan bergabung
ubahan langsung
ubahan songsang
ubahan tercantum

constant
variable
combined variation
direct variation
inverse variation
joint variation



Dalam kajian saintifik, juruelektrik menjalankan eksperimen untuk mengkaji hubungan antara dua atau lebih pemboleh ubah. Sebagai contoh, dalam suatu eksperimen mengenai arus elektrik, jika nilai voltan meningkat, maka nilai arus yang mengalir melalui litar juga meningkat dan sebaliknya. Berbeza pula, jika nilai rintangan berkurang, maka nilai arus bertambah dan sebaliknya. Tahukah anda bagaimana hubungan antara arus (I), voltan (V) dengan rintangan (R) berkait antara satu sama lain?

1.1 Ubahan Langsung

Apakah maksud ubahan langsung?



Standard Pembelajaran

Menerangkan maksud ubahan langsung.

5 cawan beras untuk 10 hidangan. 10 cawan beras untuk 20 hidangan.

Seorang tukang masak perlu menentukan bahan yang digunakan mengikut bilangan hidangan. Jika bahan yang digunakan bertambah, maka bilangan hidangan turut bertambah. Sebaliknya, jika bahan yang digunakan berkurang, maka bilangan hidangan turut berkurang.

Dalam kehidupan seharian, kita sering berdepan dengan situasi yang melibatkan hubungan perubahan kuantiti. Contohnya, jarak perjalanan dengan tambang teksi, jumlah faedah yang diperoleh mengikut tempoh dengan kadar faedah tertentu.

MOBILISASI MINDA 1

Individu

Tujuan: Menerangkan maksud ubahan langsung.

Langkah:

1. Dengan melayari laman sesawang Bank Negara Malaysia, dapatkan kadar pertukaran mata wang Ringgit Malaysia (RM) kepada Dolar Singapura (\$), Baht Thailand (฿) dan Yen Jepun (¥) yang terbaharu.
2. Dengan menggunakan kadar pertukaran tersebut, hitung nilai mata wang Ringgit Malaysia kepada Dolar Singapura, Baht Thailand dan Yen Jepun yang berikut.

Ringgit Malaysia (RM)	10	20	30	40	50
Dolar Singapura (\$)					
Baht Thailand (฿)					
Yen Jepun (¥)					

Perbincangan:

1. Nyatakan perubahan
 - (a) pada Dolar Singapura, Baht Thailand dan Yen Jepun apabila Ringgit Malaysia bertambah,
 - (b) pada Dolar Singapura, Baht Thailand dan Yen Jepun apabila Ringgit Malaysia dibahagi dengan empat,
 - (c) pada Dolar Singapura, Baht Thailand dan Yen Jepun apabila Ringgit Malaysia bertambah dua kali ganda,
 - (d) pada Dolar Singapura, Baht Thailand dan Yen Jepun apabila Ringgit Malaysia berkurang 50%.
2. Apakah hubungan antara nilai Ringgit Malaysia dengan nilai Dolar Singapura, Baht Thailand dan Yen Jepun?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 1, didapati bahawa perubahan dalam jumlah Ringgit Malaysia, RM yang ditukar menyebabkan perubahan yang sepadan dalam jumlah Dolar Singapura, \$, Baht Thailand, ฿, dan Yen Jepun, ¥. Nilai RM bertambah apabila nilai \$, ฿ dan ¥ bertambah, dan nilai RM berkurang apabila nilai \$, ฿ dan ¥ berkurang.

Hubungan ini dinamakan ubahan langsung. Secara umumnya,

Uban langsung menerangkan perkaitan antara dua pemboleh ubah, dengan keadaan apabila satu pemboleh ubah y bertambah maka pemboleh ubah x juga bertambah pada kadar yang sama dan sebaliknya. Hubungan ini juga ditulis sebagai y berubah secara langsung dengan x .

Contoh 1

Jumlah gaji seorang pekerja sambilan sebagai jurujual berubah secara langsung dengan bilangan jam dia bekerja. Nyatakan perubahan pada

- (a) jumlah gaji jika bilangan jam bertambah dua kali ganda,
- (b) jumlah gaji jika bilangan jam berkurang sebanyak 40%,
- (c) bilangan jam bekerja jika jumlah gaji yang diterima adalah separuh daripada gaji asal.

Penyelesaian:

- (a) Jumlah gaji bertambah dua kali ganda.
- (b) Jumlah gaji berkurang sebanyak 40%.
- (c) Bilangan jam bekerja adalah separuh daripada bilangan jam asal bekerja.

Latih Kendiri 1.1a

1. Nilai rintangan bagi seutas dawai berubah secara langsung dengan nilai suhunya. Nyatakan perubahan pada
 - (a) nilai rintangan jika nilai suhunya bertambah 10%,
 - (b) nilai rintangan jika nilai suhunya berkurang separuh daripada suhu asal,
 - (c) nilai suhu jika nilai rintangan berkurang $\frac{1}{4}$ daripada nilai rintangan asal.

- Puan Wardina ingin membeli kacang hijau yang dijual pada harga RM x sekilogram. Nyatakan harga kacang hijau jika Puan Wardina membeli
 - 500 g kacang hijau,
 - 2 kg kacang hijau.
- Jadual di bawah menunjukkan hubungan antara masa dengan bilangan botol jem yang dihasilkan di sebuah kilang.

Masa (minit)	5	10	15	20	25
Bilangan botol	10	20	30	40	50

Nyatakan perubahan pada bilangan botol jem yang dihasilkan apabila

- masa bertambah sebanyak dua kali ganda lebih lama,
- masa dikurangkan separuh.



Apakah hubungan antara dua pemboleh ubah bagi suatu ubahan langsung?

Standard Pembelajaran

Menentukan hubungan antara dua pemboleh ubah bagi suatu ubahan langsung.

MOBILISASI MINDA 2

Berkumpulan

Tujuan: Menentukan hubungan antara dua pemboleh ubah bagi suatu ubahan langsung.

Langkah:

- Bahagikan murid kepada 6 kumpulan.
- Setiap kumpulan memilih satu jenis kadar daripada senarai di bawah.
 - Kadar tambang teksi mengikut jarak
 - Kadar tempat letak kereta mengikut jam
 - Kadar denyutan jantung mengikut minit
 - Kadar tol mengikut jarak
 - Kadar muat turun data (Mbps)
 - Kadar faedah mudah simpanan setahun
- Dengan melayari Internet, dapatkan maklumat bagi kadar yang dipilih dan lengkapkan jadual seperti di bawah.
Misalnya, kadar tambang teksi ialah RM1.20 per km.

Jarak yang dilalui, x (km)	2	4	6	8	10
Tambang, y (RM)					
$\frac{y}{x}$					

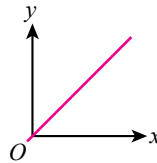
- Lukis graf y melawan x dengan skala yang sesuai berdasarkan jadual yang diperolehi.
- Jawab soalan dalam Perbincangan.
- Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda kepada kelas.

Perbincangan:

1. Berdasarkan nilai $\frac{y}{x}$, apakah kesimpulan yang boleh dibuat?
2. Nyatakan bentuk graf yang terhasil.
3. Apakah hubungan antara pemboleh ubah y dengan pemboleh ubah x ?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 2, didapati bahawa bagi suatu ubahan langsung,

- (a) nilai $\frac{y}{x}$ ialah pemalar,
- (b) graf y melawan x ialah satu garis lurus yang melalui asalan,
- (c) pemboleh ubah y berubah secara langsung dengan pemboleh ubah x .



Dalam ubahan langsung, kuantiti y dikatakan berubah secara langsung dengan x jika dan hanya jika $\frac{y}{x}$ ialah satu pemalar, dikenali sebagai pemalar perkadaran, k .

Perkaitan antara nilai k dengan konsep perkadaran:

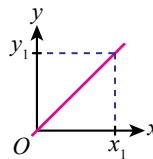
y	y_1	y_2	y_3	y_4
x	x_1	x_2	x_3	x_4

$$k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4}$$

Perkaitan antara nilai k dengan kecerunan garis lurus yang melalui asalan:

Kecerunan,

$$m = \frac{y_1}{x_1} = k$$



Perkaitan ini hanya benar jika garis lurus melalui asalan.

Apabila y berubah secara langsung dengan x , maka hubungan ini ditulis sebagai $y \propto x$. Daripada hubungan ini, nilai pemalar perkadaran k dapat ditentukan, iaitu

$$k = \frac{y}{x}.$$

Bagi suatu **ubahan langsung**, y berubah secara langsung dengan x boleh ditulis sebagai

$$y \propto x \text{ (hubungan ubahan)}$$

$$y = kx \text{ (bentuk persamaan)}$$

dengan keadaan k ialah pemalar.

TiP Bestari

Graf y melawan x ialah graf dengan pemboleh ubah y mewakili paksi mencancang dan pemboleh ubah x mewakili paksi mengufuk.

Buletin Ilmiah

Pemalar ialah nilai sesuatu kuantiti yang tetap atau tidak berubah.

Minda Kritis

Adakah semua nilai kecerunan mewakili nilai perkadaran, k ? Bincangkan.

TiP Bestari

Hubungan ubahan langsung yang ditulis sebagai ' y berubah secara langsung dengan x ' juga boleh ditulis sebagai ' x dan y adalah berkadaran langsung'.

TiP Bestari

Simbol $\propto$ merujuk kepada 'adalah berkadaran dengan'.

MOBILISASI MINDA 3 Berkumpulan

Tujuan: Menentukan hubungan antara pemboleh ubah y dengan x^2 bagi suatu ubahan langsung.

Langkah:

1. Diberi satu bulatan dengan jejari, x cm, dan luas, y cm².
2. Dalam kumpulan, secara bergilir-gilir, lengkapkan jadual di bawah. (Guna $\pi = \frac{22}{7}$)

Jejari, x (cm)	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5
Luas bulatan, y (cm ²)					
Kuasa dua jejari, x^2 (cm ²)					
Kuasa tiga jejari, x^3 (cm ³)					
$\frac{y}{x^2}$					
$\frac{y}{x^3}$					

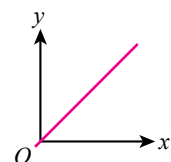
3. Lukis graf y melawan x^2 dan graf y melawan x^3 , dengan menggunakan nilai penghampiran.

Perbincangan:

1. Bandingkan nilai-nilai bagi $\frac{y}{x^2}$ dan $\frac{y}{x^3}$. Apakah kesimpulan yang boleh dibuat?
2. Graf yang manakah ialah graf garis lurus yang melalui asalan?
3. Apakah hubungan antara pemboleh ubah y dengan pemboleh ubah x^2 ?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 3, didapati bahawa bagi suatu ubahan langsung,

- (a) nilai $\frac{y}{x^2}$ ialah pemalar. Oleh itu, $k = \frac{y}{x^2}$,
- (b) graf y melawan x^2 ialah satu garis lurus yang melalui asalan,
- (c) pemboleh ubah y berubah secara langsung dengan pemboleh ubah x^2 .



Secara umumnya,

Bagi suatu **ubahan langsung**, y berubah secara langsung dengan x^n , boleh ditulis sebagai

$$\left. \begin{array}{l} y \propto x^n \text{ (hubungan ubahan)} \\ y = kx^n \text{ (bentuk persamaan)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dengan keadaan} \\ n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ dan} \\ k \text{ ialah pemalar.} \end{array}$$

Graf y melawan x^n ialah satu garis lurus yang melalui asalan dengan k ialah kecerunan garis lurus.

Minda Kritis

Dalam Mobilisasi Minda 3, apakah perkaitan antara nilai π dengan $\frac{y}{x^2}$?

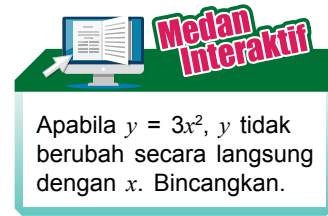
TiP Bestari

$y \propto x$ adalah benar jika dan hanya jika $n = 1$.

Contoh 2

Sebuah kereta mainan bergerak daripada keadaan pegun. Jarak yang dilalui oleh kereta mainan itu, y , berubah dengan masa, t , seperti yang ditunjukkan dalam jadual di bawah.

Masa, t (s)	2	4	6	8	10	12
Jarak, y (cm)	14	28	42	56	70	84



Tentukan sama ada y berubah secara langsung dengan t atau t^2 . Seterusnya, tuliskan hubungan tersebut dalam bentuk ubahan.

Penyelesaian:

t	2	4	6	8	10	12
y	14	28	42	56	70	84
$\frac{y}{t}$	$\frac{14}{2} = 7$	$\frac{28}{4} = 7$	$\frac{42}{6} = 7$	$\frac{56}{8} = 7$	$\frac{70}{10} = 7$	$\frac{84}{12} = 7$
$\frac{y}{t^2}$	$\frac{14}{2^2} = 3.50$	$\frac{28}{4^2} = 1.75$	$\frac{42}{6^2} = 1.17$	$\frac{56}{8^2} = 0.88$	$\frac{70}{10^2} = 0.70$	$\frac{84}{12^2} = 0.58$

y berubah secara langsung dengan t kerana nilai $\frac{y}{t}$ ialah pemalar. Maka, $y \propto t$.

y tidak berubah secara langsung dengan t^2 kerana nilai $\frac{y}{t^2}$ bukan pemalar.

Contoh 3

- (a) Dengan melukis graf y melawan x , tentukan sama ada y berubah secara langsung dengan x atau tidak.

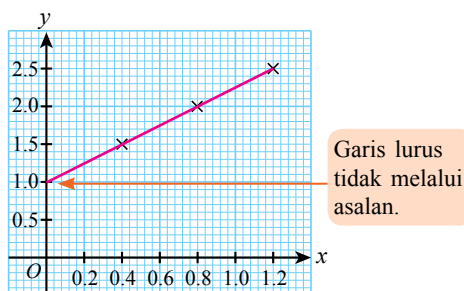
x	0.4	0.8	1.2
y	1.5	2.0	2.5

- (b) Dengan melukis graf y melawan x^2 , tentukan sama ada y berubah secara langsung dengan x^2 atau tidak.

x	2	3	4	5
y	8	18	32	50

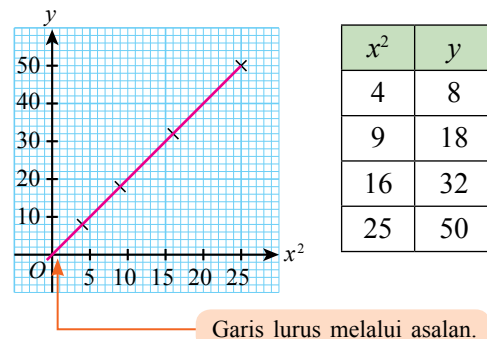
Penyelesaian:

(a)



Maka, y tidak berubah secara langsung dengan x .

(b)



Maka, y berubah secara langsung dengan x^2 .

Contoh 4

Diberi $m = 0.8$ apabila $n = 0.125$. Ungkapkan m dalam sebutan n jika

- (a) m berubah secara langsung dengan n ,
 (b) m berubah secara langsung dengan punca kuasa tiga n .

Penyelesaian:

(a) $m \propto n$ $m = kn$ $0.8 = k(0.125)$ $k = \frac{0.8}{0.125}$ $= 6.4$ Maka, $m = 6.4n$	Tuliskan hubungan dalam bentuk persamaan. Gantikan nilai m dan nilai n ke dalam persamaan untuk mendapatkan nilai k.	(b) $m \propto \sqrt[3]{n}$ $m = k\sqrt[3]{n}$ $0.8 = k(\sqrt[3]{0.125})$ $k = \frac{0.8}{\sqrt[3]{0.125}}$ $= 1.6$ Maka, $m = 1.6\sqrt[3]{n}$
--	---	--

Contoh 5

Pemanjangan spring, x cm, berubah secara langsung dengan jisim pemberat, w g, yang ditanggungnya. Diberi bahawa pemanjangan spring ialah 3 cm apabila diletakkan pemberat sebanyak 200 g. Ungkapkan x dalam sebutan w .

Penyelesaian:

$x \propto w$
 $x = kw$
 $3 = k(200)$
 $k = \frac{3}{200}$
 $= 0.015$
 Maka, $x = 0.015w$

Tuliskan hubungan dalam bentuk persamaan.

Gantikan nilai x dan nilai w ke dalam persamaan untuk mendapatkan nilai k .

Contoh 6

Diberi y berubah secara langsung dengan x . Jika $y = 0.14$ apabila $x = 0.2$, hitung nilai

- (a) y apabila $x = 5$, (b) x apabila $y = 0.875$.

Penyelesaian:

$y \propto x$ $y = kx$ $0.14 = k(0.2)$ $k = \frac{0.14}{0.2}$ $= 0.7$ Maka, $y = 0.7x$	(a) Apabila $x = 5$, $y = 0.7(5)$ $= 3.5$	(b) Apabila $y = 0.875$, $0.875 = 0.7x$ $x = \frac{0.875}{0.7}$ $= 1.25$
--	---	--

Minda Kritis

Dalam graf Contoh 3(a), mengapakah y tidak berubah secara langsung dengan x ?

TiP Bestari

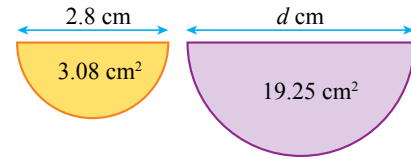
- (i) y berubah secara langsung dengan x ,
 $y \propto x$
- (ii) y berubah secara langsung dengan kuasa dua x ,
 $y \propto x^2$
- (iii) y berubah secara langsung dengan kuasa tiga x ,
 $y \propto x^3$
- (iv) y berubah secara langsung dengan punca kuasa dua x ,
 $y \propto \sqrt{x}$
- (v) y berubah secara langsung dengan punca kuasa tiga x ,
 $y \propto \sqrt[3]{x}$

Khazanah Silam

Robert Hooke (1635-1703), seorang saintis British telah memperkenalkan Hukum Hooke pada tahun 1676 yang menyatakan bahawa pemanjangan suatu bahan kenyal adalah berkadar langsung dengan daya regangan yang bertindak, selagi tidak melepasi had kenyal.

Contoh 7

Luas, $L \text{ cm}^2$, satu semi bulatan berubah secara langsung dengan kuasa dua diameternya, $d \text{ cm}$. Diberi luas semi bulatan itu ialah 3.08 cm^2 apabila diameternya ialah 2.8 cm . Hitung nilai d apabila $L = 19.25$.

**Penyelesaian:**

$$L \propto d^2$$

$$L = kd^2$$

$$3.08 = k(2.8)^2$$

$$k = \frac{3.08}{(2.8)^2}$$

$$= \frac{11}{28}$$

$$\text{Maka, } L = \frac{11}{28}d^2$$

Apabila $L = 19.25$,

$$19.25 = \frac{11}{28}d^2$$

$$d^2 = \frac{19.25 \times 28}{11}$$

$$d = \sqrt{49}$$

$$= 7 \text{ cm}$$

Langkah Alternatif:

Menggunakan konsep perkadaran:

Diberi $L_1 = 3.08$, $d_1 = 2.8$ dan $L_2 = 19.25$

$$\frac{L_1}{(d_1)^2} = \frac{L_2}{(d_2)^2}$$

$$\frac{3.08}{2.8^2} = \frac{19.25}{(d_2)^2}$$

$$(d_2)^2 = \frac{19.25 \times 2.8^2}{3.08}$$

$$d_2 = \sqrt{49}$$

$$= 7 \text{ cm}$$

Contoh 8

Tempoh ayunan, A saat, bagi satu bandul ringkas berubah secara langsung dengan punca kuasa dua panjang benang, $p \text{ cm}$. Diberi bahawa satu bandul ringkas dengan panjang benangnya ialah 9 cm mempunyai tempoh ayunan sebanyak 1.2 saat. Hitung tempoh ayunan dalam saat, jika panjang benang ialah 25 cm .

Penyelesaian:

$$A \propto \sqrt{p}$$

$$A = k\sqrt{p}$$

$$1.2 = k\sqrt{9}$$

$$k = \frac{1.2}{\sqrt{9}}$$

$$= 0.4$$

$$\text{Maka, } A = 0.4\sqrt{p}$$

Apabila $p = 25$,

$$A = 0.4\sqrt{25}$$

$$= 2 \text{ saat}$$

Langkah Alternatif:

Menggunakan konsep perkadaran:

Diberi $A_1 = 1.2$, $p_1 = 9$ dan $p_2 = 25$

$$\frac{A_1}{\sqrt{p_1}} = \frac{A_2}{\sqrt{p_2}}$$

$$\frac{1.2}{\sqrt{9}} = \frac{A_2}{\sqrt{25}}$$

$$A_2 = \frac{1.2 \times \sqrt{25}}{\sqrt{9}}$$

$$= 2 \text{ saat}$$

Latih Kendiri 1.1b

1. Jadual berikut menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y .

(a) Tentukan sama ada y berubah secara langsung dengan x atau x^3 . Kemudian, tuliskan hubungan tersebut dalam bentuk ubahan.

x	1	2	3	4	5
y	2.5	5	7.5	10	12.5

(b) Tentukan sama ada y berubah secara langsung dengan x atau $\sqrt{x}$. Kemudian, tuliskan hubungan tersebut dalam bentuk ubahan.

x	4	9	25	36	49
y	0.6	0.9	1.5	1.8	2.1

2. Spring digantung dengan beban. Jadual di sebelah menunjukkan jisim beban, x g dengan pemanjangan spring, p cm. Dengan melukis graf p melawan x , tentukan sama ada p berubah secara langsung dengan x atau tidak.

Jisim beban, x (g)	5	10	15	25	30
Pemanjangan spring, p (cm)	1	2	3	5	6

3. Diberi $p = 32$ apabila $q = 4$. Ungkapkan p dalam sebutan q jika
- p berubah secara langsung dengan q^3 ,
 - p berubah secara langsung dengan punca kuasa dua q .
4. Gaji, RM x , yang diperoleh seorang pekerja berubah secara langsung dengan jumlah masa bekerja, t jam. Diberi bahawa seorang pekerja telah menerima gaji sebanyak RM112 selepas bekerja selama 14 jam. Tuliskan persamaan yang menghubungkan x dengan t .
5. Diberi $y = 1.8$ apabila $x = 0.6$, hitung nilai y apabila $x = 5$ jika
- $y \propto x$,
 - $y \propto x^2$.
6. Diberi s berubah secara langsung dengan $t^{\frac{1}{3}}$. Jika $s = 1.2$ apabila $t = 27$, hitung nilai
- s apabila $t = 64$,
 - t apabila $s = 0.28$.
7. Bilangan patah perkataan yang ditaip, a , oleh Saiful berubah secara langsung dengan masa menaip, t minit. Jika Saiful menaip 270 patah perkataan dalam masa 6 minit, hitung masa yang digunakan olehnya untuk menaip 675 patah perkataan.
8. Sebuah objek jatuh dari ketinggian, h m, berubah secara langsung dengan kuasa dua masanya, t s di planet Q. Diberi bahawa objek itu jatuh dari ketinggian 5 m dalam masa 2 s, hitung masa yang diambil dalam saat, oleh objek itu jatuh pada ketinggian 45 m di planet itu.
9. Diberi isi padu cat, x liter, berubah secara langsung dengan luas dinding, d m². Jika 3 liter cat boleh mengecat 36 m² dinding,
- ungkapkan persamaan dalam sebutan x dan d ,
 - hitung isi padu cat dalam liter, yang diperlukan untuk mengecat dinding dengan tinggi 9 m dan lebar 5 m.

Apakah hubungan antara tiga atau lebih pemboleh ubah bagi suatu ubahan tercantum?



Standard Pembelajaran

Menentukan hubungan antara tiga atau lebih pemboleh ubah bagi suatu ubahan tercantum.

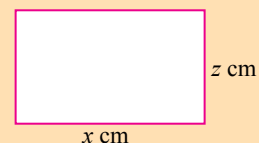
Semasa di Tingkatan 3, anda telah mempelajari pengiraan faedah mudah, I yang melibatkan pemboleh ubah P , r dan t . Situasi di atas merujuk kepada satu daripada contoh hubungan bagi ubahan tercantum. **Ubahan tercantum** ialah ubahan langsung dengan keadaan satu pemboleh ubah berubah sebagai hasil darab dua atau lebih pemboleh ubah yang lain.

MOBILISASI MINDA 4 Individu

Tujuan: Menentukan hubungan antara tiga pemboleh ubah bagi suatu ubahan tercantum.

Langkah:

- Rajah di sebelah menunjukkan satu segi empat tepat dengan panjang, x cm, dan lebar, z cm. Diberi luas segi empat tepat itu ialah y cm². Lengkapkan jadual di bawah.



(A) Jika z ialah pemalar				
Panjang, x (cm)	2	3	4	5
Lebar, z (cm)	6	6	6	6
Luas, y (cm ²)				

(B) Jika x ialah pemalar				
Panjang, x (cm)	2	2	2	2
Lebar, z (cm)	6	5	4	3
Luas, y (cm ²)				

(C) Jika x , z dan y ialah pemboleh ubah				
Panjang, x (cm)	2	3	4	5
Lebar, z (cm)	8	6	3	2
Luas, y (cm ²)				
$\frac{y}{xz}$				

Perbincangan:

- Apakah hubungan antara y dengan x jika z ialah pemalar?
- Apakah hubungan antara y dengan z jika x ialah pemalar?
- Apakah hubungan antara y , x dan z jika ketiga-tiganya ialah pemboleh ubah?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 4, didapati bahawa y berubah secara langsung dengan x , dan y berubah secara langsung dengan z . Maka, y berubah secara tercantum dengan x dan z , iaitu $y \propto xz$.

Secara umumnya,

Bagi suatu **ubahan tercantum**, y berubah secara tercantum dengan x^m dan z^n boleh ditulis sebagai

$$\left. \begin{array}{l} y \propto x^m z^n \text{ (hubungan ubahan)} \\ y = kx^m z^n \text{ (bentuk persamaan)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dengan keadaan} \\ m = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \\ n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ dan} \\ k \text{ ialah pemalar.} \end{array}$$

Contoh 9

Tuliskan hubungan dengan menggunakan simbol $\propto$ dan persamaan bagi setiap yang berikut.

- p berubah secara langsung dengan q dan $\sqrt{r}$.
- y berubah secara langsung dengan kuasa dua w dan kuasa tiga x .
- Isi padu prisma, V berubah secara langsung dengan luas keratan rentas, A dan tingginya, h .
- Jisim, w bagi sebatang besi berbentuk silinder berubah secara langsung dengan panjang, p dan kuasa dua diameter tapaknya, d .

Penyelesaian:

$$(a) \quad p \propto q\sqrt{r} \quad \leftarrow p \propto q \text{ dan } p \propto \sqrt{r}$$

$$p = kq\sqrt{r}$$

$$(c) \quad V \propto Ah \quad \leftarrow V \propto A \text{ dan } V \propto h$$

$$V = kAh$$

$$(b) \quad y \propto w^2 x^3 \quad \leftarrow y \propto w^2 \text{ dan } y \propto x^3$$

$$y = kw^2 x^3$$

$$(d) \quad w \propto pd^2 \quad \leftarrow w \propto p \text{ dan } w \propto d^2$$

$$w = kpd^2$$

Contoh 10

Diberi bahawa $x \propto y^2 z$, ungkapkan x dalam sebutan y dan z jika $x = 6$ apabila $y = 3$ dan $z = 5$.

Penyelesaian:

$$x \propto y^2 z$$

$$x = ky^2 z \quad \leftarrow \text{Tuliskan hubungan dalam bentuk persamaan.}$$

$$6 = k(3)^2(5) \quad \leftarrow \text{Gantikan nilai-nilai } x, y \text{ dan } z \text{ ke dalam persamaan untuk mendapatkan nilai } k.$$

$$k = \frac{6}{(3)^2(5)}$$

$$= \frac{2}{15}$$

$$\text{Maka, } x = \frac{2}{15} y^2 z$$

TiP Bestari

$y \propto xz$ ialah cantuman dua hubungan $y \propto x$ dan $y \propto z$.

Minda Kritis

Bincangkan hubungan bagi persamaan faedah mudah, $I = Prt$.

TiP Bestari

$y \propto xz$ boleh dibaca sebagai

- y berubah secara langsung dengan x dan z
- y berubah secara tercantum dengan x dan z
- y berkadaran secara tercantum terhadap x dan z

Contoh 11

Tenaga keupayaan graviti, E Joule, bagi suatu objek berubah secara langsung dengan jisimnya, m kg, pecutan graviti, g m s⁻² dan kedudukannya pada ketinggian, h m. Diberi bahawa $E = 197$ Joule apabila $m = 4$ kg, $g = 9.81$ m s⁻² dan $h = 5$ m, tuliskan satu persamaan yang menghubungkan E , m , g dan h .

Penyelesaian:

$$E \propto mgh$$

$$E = kmgh \quad \leftarrow \text{Tuliskan hubungan dalam bentuk persamaan.}$$

$$197 = k(4)(9.81)(5) \quad \leftarrow \text{Gantikan nilai-nilai } E, m, g \text{ dan } h \text{ ke dalam persamaan untuk mendapatkan nilai } k.$$

$$k = \frac{197}{(4)(9.81)(5)}$$

$$= 1$$

Maka, $E = mgh$

Contoh 12

Tiga kuantiti, S , T dan U berubah seperti yang ditunjukkan dalam jadual di sebelah. Diberi bahawa S berubah secara langsung dengan T dan punca kuasa tiga U . Hitung nilai x dan nilai y .

S	6	x	50
T	0.8	1.2	40
U	27	125	y

Penyelesaian:

$$S \propto T^3 \sqrt{U}$$

$$S = kT^3 \sqrt{U}$$

$$S = 6 \text{ apabila } T = 0.8 \text{ dan } U = 27,$$

$$6 = k(0.8)^3 \sqrt{27}$$

$$k = \frac{6}{(0.8)^3 \sqrt{27}}$$

$$= 2.5$$

$$\text{Maka, } S = 2.5T^3 \sqrt{U}$$

$$\text{Apabila } T = 1.2 \text{ dan } U = 125,$$

$$x = 2.5(1.2)^3 \sqrt{125}$$

$$= 15$$

$$\text{Apabila } S = 50 \text{ dan } T = 40,$$

$$50 = 2.5(40)^3 \sqrt{y}$$

$$\sqrt[3]{y} = \frac{50}{(2.5)(40)}$$

$$= 0.5$$

$$y = 0.5^3$$

$$= 0.125$$

Buletin Ilmiah

- Tenaga keupayaan graviti ialah tenaga yang tersimpan di dalam sebuah objek disebabkan oleh kedudukannya.
- Pecutan graviti, g , ialah suatu pemalar. Tenaga disimpan disebabkan oleh tarikan graviti Bumi terhadap objek. Nilai g berbeza di setiap jasad cakerawala. Misalnya, nilai g di Bumi ialah 9.81 m s⁻² dan di bulan ialah 1.62 m s⁻².

Langkah Alternatif:

Menggunakan konsep perkadaran:

Diberi $S_1 = 6$, $T_1 = 0.8$, $U_1 = 27$
dan $S_2 = x$, $T_2 = 1.2$, $U_2 = 125$

$$\frac{S_1}{T_1^3 \sqrt{U_1}} = \frac{S_2}{T_2^3 \sqrt{U_2}}$$

$$\frac{6}{(0.8)^3 \sqrt{27}} = \frac{x}{(1.2)^3 \sqrt{125}}$$

$$x = \frac{(6)(1.2)^3 \sqrt{125}}{(0.8)^3 \sqrt{27}}$$

$$= 15$$

Diberi $S_1 = 6$, $T_1 = 0.8$, $U_1 = 27$

dan $S_2 = 50$, $T_2 = 40$, $U_2 = y$

$$\frac{S_1}{T_1^3 \sqrt{U_1}} = \frac{S_2}{T_2^3 \sqrt{U_2}}$$

$$\frac{6}{(0.8)^3 \sqrt{27}} = \frac{50}{(40)^3 \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{y} = \frac{(50)(0.8)^3 \sqrt{27}}{(40)^3 (6)}$$

$$= 0.5$$

$$y = 0.5^3$$

$$= 0.125$$

Latih Kendiri 1.1c

- Tuliskan hubungan dengan menggunakan simbol $\propto$ bagi setiap yang berikut.
 - s berubah secara langsung dengan t dan u .
 - v berubah secara langsung dengan w^2 dan x .
 - a berubah secara langsung dengan kuasa tiga b dan punca kuasa dua c .
 - Luas permukaan melengkung, L cm², sebuah silinder berubah secara langsung dengan jejari tapaknya, j cm dan tingginya, h cm.
- Hitung pemalar, k bagi setiap yang berikut.
 - p berubah secara langsung dengan q^3 dan $r^{\frac{1}{3}}$. Diberi $p = 5.184$ apabila $q = 1.2$ dan $r = 216$.
 - p berubah secara langsung dengan q , r dan kuasa dua s . Diberi $p = \frac{1}{3}$ apabila $q = \frac{1}{5}$, $r = \frac{3}{2}$ dan $s = \frac{1}{3}$.
- Diberi $y = 6$ apabila $x = 0.64$ dan $z = 5$, ungkapkan y dalam sebutan x dan z jika
 - y berubah secara langsung dengan $\sqrt{x}$ dan z ,
 - y berubah secara langsung dengan x dan kuasa dua z .
- Harga bagi sebatang rod besi, RM x , berubah secara langsung dengan panjang, p cm dan kuasa dua jejari, j cm. Jika sebatang rod besi dengan panjang 150 cm dan jejari 3 cm dijual pada harga RM27, tuliskan satu persamaan yang menghubungkan x dengan p dan j .
- Diberi G berubah secara langsung dengan H dan punca kuasa dua M . Jika $G = 42$ apabila $H = 7$ dan $M = 16$, hitung
 - nilai G apabila $H = 4$ dan $M = 81$,
 - nilai M apabila $G = 18$ dan $H = 20$.
- Jadual di bawah menunjukkan perubahan tiga kuantiti. Diberi P berubah secara langsung dengan kuasa tiga Q , dan R . Hitung nilai x dan nilai y .

P	86.4	x	1.215
Q	1.2	2	y
R	10	0.4	9

- Tenaga kinetik, E Joule, sebuah objek berubah secara langsung dengan jisim, w kg dan kuasa dua laju, v m s⁻¹, objek itu. Diberi bahawa tenaga kinetik sebuah objek dengan jisim 3 kg bergerak dengan kelajuan 12 m s⁻¹ ialah 216 Joule. Hitung laju dalam m s⁻¹, objek itu jika jisim dan tenaga kinetik masing-masing ialah 5 kg dan 640 Joule.
- Isi padu sebuah kon, V cm³, berubah secara langsung dengan tinggi, h cm, dan kuasa dua jejari tapaknya, j cm. Sebuah kon dengan tinggi 21 cm dan jejari 6 cm mempunyai isi padu 792 cm³. Hitung isi padu dalam cm³, kon dengan tinggi 14 cm dan jejari 15 cm.

Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan ubahan langsung?

Contoh 13

Hukum Charles menyatakan bahawa bagi satu jisim gas yang tetap, isi padu, $V \text{ cm}^3$, gas itu berkadar langsung dengan suhu mutlaknya, $T \text{ Kelvin}$, jika tekanan gas itu adalah tetap. Diberi bahawa sebuah bekas mengandungi 30 cm^3 gas pada suhu 30°C .

- Ungkapkan V dalam sebutan T .
- Hitung isi padu dalam cm^3 , gas itu jika suhu berubah kepada -11°C .

[Rumus penukaran suhu dalam darjah Celsius kepada Kelvin:

$$x^\circ\text{C} = (273 + x) \text{ K}]$$

Penyelesaian:

Memahami masalah

$$V \propto T$$

$$V = 30 \text{ apabila } T = (273 + x) \text{ K}$$

Merancang strategi

- Tuliskan ubahan langsung dalam bentuk persamaan.
- Gantikan nilai T ke dalam persamaan dan kemudian, hitung isi padu gas itu.

Membuat kesimpulan

$$(a) \quad V = \frac{10}{101} T$$

$$(b) \quad V = 25.94 \text{ cm}^3$$

Melaksanakan strategi

$$\begin{aligned} (a) \quad V &\propto T \\ V &= kT \\ V &= k(273 + x) \\ 30 &= k(273 + 30) \\ k &= \frac{30}{303} \\ &= \frac{10}{101} \\ V &= \frac{10}{101} T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad V &= \frac{10}{101} T \\ V &= \frac{10}{101} (273 - 11) \\ &= 25.94 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan ubahan langsung.

Khazanah Silam

Hubungan antara isi padu dengan suhu suatu jisim gas yang tetap pada tekanan yang tetap telah dikaji pertama kali oleh Jacques Charles.

Contoh 14

Puan Soon menyimpan wangnya dalam akaun simpanan. Diberi bahawa faedah, I yang diterima berubah secara langsung dengan jumlah prinsipal, p dan tempoh dalam tahun, t wang yang disimpan. Puan Soon menerima faedah sebanyak RM200 apabila dia menyimpan RM4 000 selama dua tahun.

- Hitung tempoh simpanan yang diperlukan supaya Puan Soon dapat menerima faedah RM650 dengan prinsipal RM5 200.
- Puan Soon ingin mendapatkan jumlah faedah yang sama tetapi mengurangkan tempoh simpanan di (a). Adakah dia perlu menambahkan atau mengurangkan nilai prinsipalnya? Jelaskan jawapan anda.

Penyelesaian:

Memahami masalah

$$I \propto pt$$

$I = 200$ apabila $p = 4\,000$
dan $t = 2$

Merancang strategi

- Tulis ubahan langsung dalam bentuk persamaan dan hitung nilai t apabila $I = 650$ dan $p = 5\,200$.
- Memahami perubahan bagi setiap pemboleh ubah dalam persamaan.

Membuat kesimpulan

- 5 tahun.
- Prinsipal perlu ditambahkan untuk mendapat jumlah faedah yang sama jika tempoh simpanan dikurangkan. Hal ini kerana jumlah faedah berkadar langsung dengan hasil darab prinsipal dan tempoh.

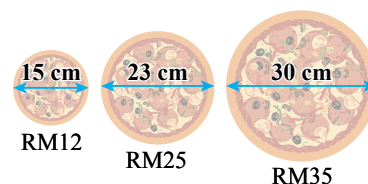
Melaksanakan strategi

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad I &= kpt \\ 200 &= k(4\,000)(2) \\ k &= \frac{200}{(4\,000)(2)} \\ &= 0.025 \\ \therefore I &= 0.025pt \\ \text{Apabila } I &= 650 \text{ dan } p = 5\,200, \\ 650 &= (0.025)(5\,200)t \\ t &= \frac{650}{(0.025)(5\,200)} \\ &= 5 \text{ tahun} \end{aligned}$$

- Untuk mengekalkan nilai I dalam persamaan $I = 0.025pt$,
 - apabila p berkurang, t bertambah
 - apabila p bertambah, t berkurang

Latih Kendiri 1.1d

- Lee mengisi air ke dalam sebuah tangki dengan menggunakan hos getah pada pukul 8:00 pagi. Pada pukul 11:00 pagi, Lee mendapati bahawa tangki itu telah diisi dengan 48% air.
 - Tuliskan satu persamaan yang menghubungkan isi padu air, V , yang diisi ke dalam tangki dengan masa yang diambil, t .
 - Pada pukul berapakah tangki itu akan diisi penuh dengan air?
- Aminah ingin menggantung beberapa bentuk segi tiga daripada sekeping kad. Diberi luas segi tiga yang digantung, $L \text{ cm}^2$, berubah secara langsung dengan tapak, $x \text{ cm}$, dan tinggi, $y \text{ cm}$. Pada mulanya, dia menggantung satu segi tiga dengan $L = 14$, $x = 7$ dan $y = 4$.
 - Tuliskan hubungan antara L dengan x dan y .
 - Aminah merancang untuk menggantung segi tiga kedua dengan nilai tapak bertambah 20% dan nilai tinggi berkurang 10%. Berapakah peratusan perubahan untuk luas segi tiga kedua ini?
- Sebuah kedai piza menjual tiga saiz piza dengan harga berbeza seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Adakah harga piza, $\text{RM}p$, berubah secara langsung dengan luas permukaan, $A \text{ cm}^2$, piza itu? Jika tidak, saiz piza yang manakah lebih berbaloi dengan harganya?



1.2 Ubahan Songsang

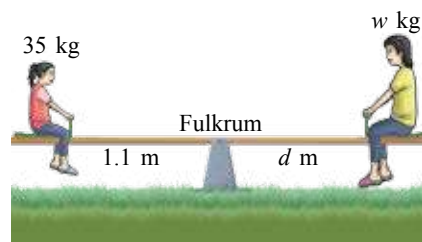
Apakah maksud ubahan songsang?

Semasa berada di atas jungkang-jongket, seseorang yang lebih berat akan berada di bawah manakala seseorang yang lebih ringan akan berada di atas. Tahukah anda bagaimana menyeimbangkan jungkang-jongket tersebut?

Bagi menyeimbangkan sebuah jungkang-jongket, seseorang yang lebih berat perlu duduk lebih dekat dengan fulkrum jungkang-jongket tersebut, atau seseorang yang lebih ringan perlu duduk lebih jauh dari fulkrum. Perhatikan rajah di sebelah. Hubungan antara jisim pemain, w , dengan jarak antara pemain dan fulkrum, d , dikatakan berubah secara songsang. Apabila w bertambah, d berkurang dan sebaliknya.

Standard Pembelajaran

Menerangkan maksud ubahan songsang.



MOBILISASI MINDA 5 Individu

Tujuan: Menerangkan maksud ubahan songsang.

Langkah:

1. Fahami situasi berikut dan kemudian jawab soalan dalam Perbincangan. Dewan sebuah sekolah mempunyai beberapa buah pintu. Jadual di bawah menunjukkan hubungan antara bilangan pintu yang dibuka, x , dengan masa yang diambil, y , bagi sekumpulan murid untuk keluar dari dewan.

Bilangan pintu yang dibuka, x	2	3	4	5	6
Masa yang diambil, y (minit)	24	16	12	9.6	8

Perbincangan:

1. Jika bilangan pintu yang dibuka semakin bertambah, adakah masa yang diambil oleh murid untuk keluar semakin bertambah atau berkurang?
2. Jika bilangan pintu yang dibuka semakin berkurang, adakah masa yang diambil oleh murid untuk keluar semakin bertambah atau berkurang?
3. Apakah hubungan antara bilangan pintu yang dibuka dengan masa yang diambil oleh murid untuk keluar dari dewan?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 5, didapati bahawa apabila bilangan pintu yang dibuka semakin bertambah, masa yang diambil oleh murid untuk keluar dari dewan semakin berkurang. Begitu juga, apabila bilangan pintu yang dibuka semakin berkurang, masa yang diambil oleh murid untuk keluar semakin bertambah. Perubahan yang berlaku pada bilangan pintu yang dibuka menghasilkan implikasi yang bertentangan dengan masa yang diambil oleh murid untuk keluar dari dewan.

Hubungan ini dinamakan ubahan songsang. Secara umumnya,

Dalam **ubahan songsang**, pemboleh ubah y bertambah apabila pemboleh ubah x berkurang pada kadar yang sama dan sebaliknya. Hubungan ini juga ditulis sebagai y berubah secara songsang dengan x .

Contoh 15

Chia Ming mengambil bahagian dalam satu larian maraton dengan jarak 42 km. Jadual di bawah menunjukkan hubungan antara masa yang diambil oleh Chia Ming dengan laju puratanya.

Masa, t (jam)	4	5	6	7	8
Laju purata, v (km/j)	10.50	8.40	7.00	6.00	5.25

Nyatakan perubahan pada laju purata jika masa yang diambil

- bertambah dua kali ganda,
- berkurang 1.5 kali ganda.

Penyelesaian:

(a)

t	v
4	10.50
8	5.25

$\times 2$ (on t) $\div 2$ (on v)

Apabila masa bertambah dua kali ganda, maka laju purata berkurang dua kali ganda.

(b)

t	v
6	7.00
4	10.50

$\div 1.5$ (on t) $\times 1.5$ (on v)

Apabila masa berkurang 1.5 kali ganda, maka laju purata bertambah 1.5 kali ganda.

Latih Kendiri 1.2a

- Jadual di sebelah menunjukkan hubungan antara bilangan pekerja dengan bilangan hari yang diperlukan untuk memasang jubin di sebuah rumah. Nyatakan perubahan pada bilangan hari jika bilangan pekerja
 - didarabkan dengan dua,
 - berkurang separuh.

Bilangan pekerja	Bilangan hari
2	12
4	6
6	4
8	3

- Cikgu Farid mempunyai sejumlah wang untuk membeli hadiah untuk pemenang kuiz Matematik. Jika harga sebuah hadiah ialah RM10, maka Cikgu Farid boleh membeli 10 buah hadiah. Nyatakan hubungan bilangan hadiah yang boleh dibeli jika harga sebuah hadiah
 - bertambah dua kali ganda,
 - berkurang 50%.

Apakah hubungan antara dua pemboleh ubah bagi suatu ubahan songsang?

Standard Pembelajaran

Menentukan hubungan antara dua pemboleh ubah bagi suatu ubahan songsang.

MOBILISASI MINDA 6 Berkumpulan

Tujuan: Menentukan hubungan antara dua pemboleh ubah bagi suatu ubahan songsang.

Langkah:

Sekeping kadbod mempunyai luas 1.44 m^2 . Kadbod itu akan digunting kepada y keping kad segi empat sama yang kecil dengan luas setiap kad kecil itu ialah $x \text{ m}^2$.

1. Buka lembaran aktiviti dengan mengimbas kod QR.

	A	B	C	D	E	F
1	Luas kadbod =	1.44 m ²				
2						
3	Luas kad segi empat sama kecil, $x \text{ (m}^2\text{)}$	0.02				
4	Bilangan kad segi empat sama kecil, y	72				
5	xy	1.44				
6	$\frac{1}{x}$	50				



Imbas kod QR atau layari bit.do/LKBab1 untuk mendapatkan lembaran aktiviti.

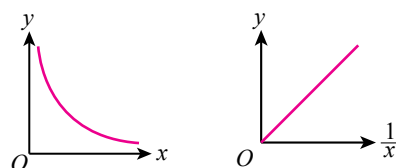
2. Masukkan nilai luas kad kecil, $x = 0.04$ dalam *cell* berwarna dan tekan 'Enter'. Ulangi langkah yang sama untuk nilai x bersamaan 0.09, 0.16 dan 0.36. Perhatikan nilai-nilai y , xy dan $\frac{1}{x}$ bagi setiap nilai x .
3. Lukis graf y melawan x dan graf y melawan $\frac{1}{x}$ mengikut skala yang sesuai berdasarkan nilai yang diperoleh.

Perbincangan:

1. Bandingkan nilai xy . Apakah kesimpulan yang boleh dibuat tentang nilai xy ?
2. Apakah bentuk kedua-dua graf yang diperoleh?
3. Apakah hubungan antara y dengan x ?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 6, didapati bahawa bagi suatu ubahan songsang,

- (a) nilai xy ialah pemalar. Oleh itu, $k = xy$,
- (b) graf y melawan x ialah hiperbola dan graf y melawan $\frac{1}{x}$ ialah satu garis lurus yang bermula daripada asalan,
- (c) y berubah secara songsang dengan x .



Apabila pemboleh ubah y berubah secara songsang dengan pemboleh ubah x , nilai xy ialah satu pemalar yang diwakili dengan k .

Perkaitan antara nilai k dengan konsep perkadaran:

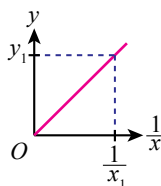
y	y_1	y_2	y_3	y_4
x	x_1	x_2	x_3	x_4

$$k = x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = x_4 y_4$$

Perkaitan antara nilai k dengan kecerunan garis lurus yang bermula daripada asalan bagi graf y melawan $\frac{1}{x}$:

Kecerunan,

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_1}{\frac{1}{x_1}} \\ &= x_1 y_1 \\ &= k \end{aligned}$$



Perkaitan ini hanya benar jika garis lurus bermula daripada asalan.

TIP Bestari

Hubungan ubahan songsang yang ditulis sebagai 'y berubah secara songsang dengan x' juga boleh ditulis sebagai 'x dan y berkadaran songsang'.

Maka, kita boleh menghubungkan dua pemboleh ubah x dan y dalam bentuk persamaan, iaitu

$$\begin{aligned} xy &= k \\ y &= \frac{k}{x} \end{aligned}$$

Bagi suatu **ubahan songsang**, y berubah secara songsang dengan x boleh ditulis sebagai

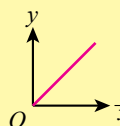
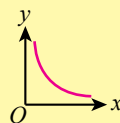
$$y \propto \frac{1}{x} \text{ (hubungan ubahan)}$$

$$y = \frac{k}{x} \text{ (bentuk persamaan)}$$

dengan keadaan k ialah pemalar.

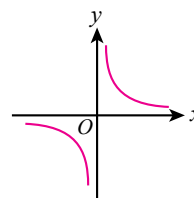
(a) Graf y melawan x ialah hiperbola.

(b) Graf y melawan $\frac{1}{x}$ ialah graf garis lurus yang bermula daripada asalan ($x \neq 0$).



KOTAK MEMORI

$y = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$ ialah fungsi salingan dengan graf berbentuk hiperbola.



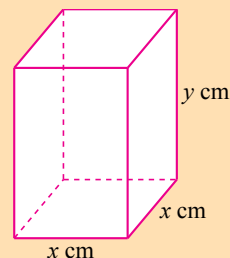
MOBILISASI MINDA 7 Berkumpulan

Tujuan: Menentukan hubungan antara pemboleh ubah y dengan x^2 bagi suatu ubahan songsang.

Langkah:

- Diberi isi padu sebuah kuboid dengan tapak segi empat sama ialah 180 cm^3 . Jadual di bawah menunjukkan hubungan antara panjang sisi tapak dengan tinggi kuboid. Lengkapkan jadual di bawah.

Panjang sisi tapak, x (cm)	2	3	4	5	6
Tinggi, y (cm)					
xy					
$x^2 y$					
$\frac{1}{x^2}$					



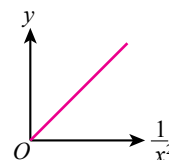
2. Lukis graf y melawan x dan graf y melawan $\frac{1}{x^2}$ mengikut skala yang sesuai berdasarkan jadual.

Perbincangan:

1. Bandingkan nilai-nilai xy dan x^2y . Apakah kesimpulan yang boleh dibuat?
2. Graf yang manakah ialah graf garis lurus yang bermula daripada asalan?
3. Apakah hubungan antara y dengan x^2 ?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 7, didapati bahawa bagi suatu ubahan songsang,

- (a) nilai x^2y ialah pemalar. Oleh itu, $k = x^2y$,
- (b) graf y melawan $\frac{1}{x^2}$ ialah satu garis lurus yang bermula daripada asalan,
- (c) y berubah secara songsang dengan x^2 .

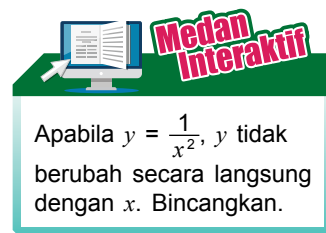


Secara umumnya,

Bagi suatu **ubahan songsang**, y berubah secara songsang dengan x^n boleh ditulis sebagai

$$\left. \begin{array}{l} y \propto \frac{1}{x^n} \text{ (hubungan ubahan)} \\ y = \frac{k}{x^n} \text{ (bentuk persamaan)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dengan keadaan} \\ n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ dan} \\ k \text{ ialah pemalar.} \end{array}$$

Graf y melawan $\frac{1}{x^n}$ ialah satu garis lurus yang bermula daripada asalan ($x \neq 0$) dengan k ialah kecerunan garis lurus.



TiP Bestari

$y \propto \frac{1}{x}$ adalah benar jika dan hanya jika $n = 1$.

Contoh 16

Diberi masa, t , yang diperlukan untuk menyiapkan kerja pemasangan perabot berubah secara songsang dengan bilangan pekerja, x . Jadual di bawah menunjukkan hubungan antara x dengan t .

Bilangan pekerja, x	2	3	4	5	6
Masa diperlukan, t (minit)	180	120	90	72	60

Dengan mengira nilai xt dan x^2t , tentukan sama ada t berubah secara songsang dengan x atau x^2 . Kemudian, tuliskan hubungan tersebut dengan menggunakan simbol $\propto$.

Penyelesaian:

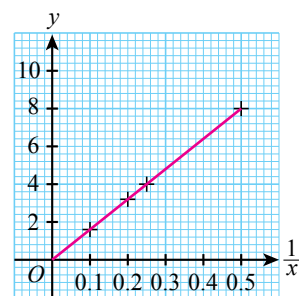
x	2	3	4	5	6
t	180	120	90	72	60
xt	$2(180) = 360$	$3(120) = 360$	$4(90) = 360$	$5(72) = 360$	$6(60) = 360$
x^2t	$2^2(180) = 720$	$3^2(120) = 1080$	$4^2(90) = 1440$	$5^2(72) = 1800$	$6^2(60) = 2160$

Nilai xt ialah pemalar, manakala nilai x^2t bukan pemalar. Maka, t berubah secara songsang dengan x , iaitu $t \propto \frac{1}{x}$.

Contoh 17

Dua kuantiti, x dan y , berubah mengikut jadual di sebelah. Menggunakan skala yang sesuai, lukis graf y melawan $\frac{1}{x}$ dan tunjukkan bahawa y berubah secara songsang dengan x .

x	2	4	5	10
y	8	4	3.2	1.6

**Penyelesaian:**

$\frac{1}{x}$	0.5	0.25	0.2	0.1
y	8	4	3.2	1.6

Graf y melawan $\frac{1}{x}$ menunjukkan satu garis lurus yang bermula daripada asalan. Maka, y berubah secara songsang dengan x .

Contoh 18

Diberi $x = 0.25$ apabila $y = 3$. Ungkapkan y dalam sebutan x jika
 (a) y berubah secara songsang dengan x ,
 (b) y berubah secara songsang dengan punca kuasa dua x .

Penyelesaian:

(a) $y \propto \frac{1}{x}$ (b) $y \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$

Tuliskan hubungan dalam bentuk persamaan. $y = \frac{k}{x}$ $\rightarrow$ $y = \frac{k}{\sqrt{x}}$

Gantikan nilai y dan nilai x ke dalam persamaan untuk mendapatkan nilai k . $3 = \frac{k}{0.25}$ $\rightarrow$ $3 = \frac{k}{\sqrt{0.25}}$

$k = 3(0.25)$ $k = 3(\sqrt{0.25})$

$= 0.75$ $= 1.5$

Maka, $y = \frac{0.75}{x}$ $\rightarrow$ $\text{Maka, } y = \frac{1.5}{\sqrt{x}}$

TiP Bestari

- (i) y berubah secara songsang dengan x ,
 $y \propto \frac{1}{x}$
- (ii) y berubah secara songsang dengan kuasa dua x ,
 $y \propto \frac{1}{x^2}$
- (iii) y berubah secara songsang dengan kuasa tiga x ,
 $y \propto \frac{1}{x^3}$
- (iv) y berubah secara songsang dengan punca kuasa dua x ,
 $y \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$
- (v) y berubah secara songsang dengan punca kuasa tiga x ,
 $y \propto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Contoh 19

Tarikan graviti, F , berubah secara songsang dengan kuasa dua jarak di antara dua buah objek, d . Diberi tarikan graviti di antara dua buah objek ialah 15 N apabila jarak di antaranya ialah 1.2 cm. Tuliskan satu ungkapan F dalam sebutan d .

Penyelesaian:

$$F \propto \frac{1}{d^2}$$

$$F = \frac{k}{d^2}$$

$$15 = \frac{k}{(1.2)^2}$$

$$k = 15(1.2)^2$$

$$= 21.6$$

$$\text{Maka, } F = \frac{21.6}{d^2}$$

Tuliskan hubungan antara F dengan d dalam bentuk persamaan.

Gantikan nilai F dan nilai d ke dalam persamaan untuk mendapatkan nilai k .

Khazanah Silam

Sir Isaac Newton (1642-1727), seorang ahli fizik Inggeris yang terkenal telah menerbitkan Hukum Graviti Newton dalam bukunya *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* pada tahun 1687.

Contoh 20

Diberi p berubah secara songsang dengan q . Jika $p = 2$ apabila $q = 7$, hitung nilai p apabila $q = 1.6$.

Penyelesaian:

$$p \propto \frac{1}{q}$$

$$p = \frac{k}{q}$$

$$2 = \frac{k}{7}$$

$$k = 2(7)$$

$$= 14$$

$$\text{Maka, } p = \frac{14}{q}$$

$$\text{Apabila } q = 1.6,$$

$$p = \frac{14}{1.6}$$

$$= 8.75$$

Langkah Alternatif:

Menggunakan konsep perkadaran:

Diberi $p_1 = 2$, $q_1 = 7$, $q_2 = 1.6$

$$p_1 q_1 = p_2 q_2$$

$$2 \times 7 = p_2 \times 1.6$$

$$p_2 = \frac{2 \times 7}{1.6}$$

$$= 8.75$$

Latih Kendiri 1.2b

1. Jadual berikut menunjukkan nilai-nilai bagi dua pemboleh ubah, x dan y .

- (a) Tentukan sama ada y berubah secara songsang dengan x . Jika ya, tuliskan hubungan dalam bentuk ubahan.

x	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
y	6	4	3	2	1

- (b) Tentukan sama ada y berubah secara songsang dengan x^2 . Jika ya, tuliskan hubungan dalam bentuk ubahan.

x	1	2	3	4	5
y	3.6	0.9	0.4	0.225	0.144

2. Jadual di bawah menunjukkan nilai arus, I (Ampere, A) yang mengalir melalui litar, dengan nilai rintangannya, R (Ohm, Ω).

Rintangan, R (Ω)	42	35	30	21	15
Arus, I (A)	5	6	7	10	14

Dengan melukis graf I melawan $\frac{1}{R}$ menggunakan skala yang sesuai, tentukan sama ada I berubah secara songsang dengan R .

3. Diberi bahawa $g = 0.15$ apabila $h = 8$. Ungkapkan g dalam sebutan h jika
- g berubah secara songsang dengan h ,
 - g berubah secara songsang dengan h^2 ,
 - g berubah secara songsang dengan punca kuasa tiga h .
4. Diberi $y = 0.5$ apabila $x = 16$, hitung nilai y apabila $x = 0.04$ jika
- $y \propto \frac{1}{x}$
 - $y \propto \frac{1}{x^3}$
 - $y \propto \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$
 - $y \propto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
5. Hitung nilai s dan nilai t bagi setiap hubungan berikut.
- y berubah secara songsang dengan x .
 - y berubah secara songsang dengan punca kuasa dua x .
- | | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
|--|--|--|--|

x	3	s	5
y	2	1.5	t

x	$\frac{9}{4}$	s	0.04
y	8	2.4	t

6. Sebuah syarikat mencetak sejumlah buku setiap hari. Jadual di bawah menunjukkan bilangan buah mesin, M yang beroperasi dan masa yang diperlukan, T untuk mencetak buku-buku tersebut. Diberi T berubah secara songsang dengan M .

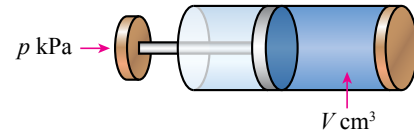
M	6	8	q
T	10	p	4

- (a) Ungkapkan T dalam sebutan M .
 - (b) Tentukan nilai p dan nilai q .
7. Tempoh ayunan, T , bagi suatu bandul ringkas berubah secara songsang dengan punca kuasa dua pecutan graviti, g . Dalam satu eksperimen, tempoh ayunan ialah 1.01 saat apabila pecutan graviti sebanyak 9.85 m s^{-2} . Ungkapkan T dalam sebutan g .

Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan ubahan songsang?

Contoh 21

Berdasarkan Hukum Boyle, tekanan gas, p , bagi satu jisim gas berkadar songsang dengan isi padu gas, V , jika suhu gas itu adalah tetap. Rajah di sebelah menunjukkan gas terperangkap di dalam sebuah silinder. Apabila isi padu di dalam silinder itu ialah 80 cm^3 , maka tekanan gas menjadi 190.25 kPa . Hitung isi padu gas dalam cm^3 , apabila tekanan gas di dalam silinder itu ialah 121.76 kPa .



Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan ubahan songsang.

Penyelesaian:

Memahami masalah

- p berkadaran songsang dengan V
- Apabila $V = 80 \text{ cm}^3$,
 $p = 190.25 \text{ kPa}$

Merancang strategi

Tentukan hubungan antara p dengan V dalam bentuk persamaan. Kemudian, hitung nilai V apabila $p = 121.76 \text{ kPa}$.

Membuat kesimpulan

Apabila
 $p = 121.76 \text{ kPa}$,
 $V = 125 \text{ cm}^3$

Melaksanakan strategi

$$p \propto \frac{1}{V}$$

$$p = \frac{k}{V}$$

$$\text{Apabila } V = 80, p = 190.25,$$

$$190.25 = \frac{k}{80}$$

$$k = 190.25 \times 80$$

$$= 15\,220$$

$$\text{Maka, } p = \frac{15\,220}{V}$$

$$\text{Apabila } p = 121.76,$$

$$121.76 = \frac{15\,220}{V}$$

$$V = \frac{15\,220}{121.76}$$

$$= 125 \text{ cm}^3$$

Latih Kendiri 1.2c

- Jadual di sebelah menunjukkan rintangan bagi seutas dawai yang berubah dengan keratan rentas jejari.
 - Tentukan sama ada rintangan, R , bagi dawai ini berubah secara songsang dengan j^2 .
 - Hitung jejari dawai dalam mm, jika rintangannya ialah 25Ω .
- Bilangan kubus, b , yang dihasilkan daripada sejumlah kuantiti logam yang tetap berubah secara songsang dengan kuasa tiga sisinya, $p \text{ cm}$. Jika $b = 16$ apabila $p = 1.5$, hitung nilai p apabila $b = 250$.
- Bilangan ayunan, A bagi satu bandul ringkas berubah secara songsang dengan punca kuasa dua panjang bandul, $p \text{ cm}$ dalam suatu tempoh yang tetap. Diberi bahawa bilangan ayunan ialah 9 apabila panjang bandul ialah 36 cm, hitung panjang bandul ringkas jika bilangan ayunan ialah 15.

Rintangan, $R (\Omega)$	1	4	9	16
Jejari keratan rentas, $j (\text{mm})$	1.2	0.6	0.4	0.3

1.3 Ubahan Bergabung

 Apakah hubungan antara tiga atau lebih pemboleh ubah bagi suatu ubahan bergabung?

Standard Pembelajaran

Menentukan hubungan antara tiga atau lebih pemboleh ubah bagi suatu ubahan bergabung.

Cikgu, apakah maksud ubahan bergabung?



Ubahan bergabung melibatkan gabungan ubahan langsung atau ubahan tercantum, dan ubahan songsang.

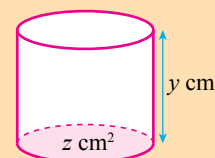
MOBILISASI MINDA 8

 Berkumpulan

Tujuan: Menentukan hubungan antara tiga pemboleh ubah bagi suatu ubahan bergabung yang melibatkan ubahan langsung dan ubahan songsang.

Langkah:

1. Anda telah mengetahui bahawa rumus bagi isi padu sebuah silinder ialah hasil darab luas tapak dan tingginya. Jika x , y dan z masing-masing mewakili isi padu, tinggi dan luas tapak silinder, lengkapkan jadual di bawah.



(A) Jika z adalah tetap				
Isi padu, x (cm ³)	100	200	300	400
Tinggi, y (cm)				
Luas tapak, z (cm ²)	50	50	50	50
$\frac{x}{y}$				

(B) Jika x adalah tetap				
Isi padu, x (cm ³)	120	120	120	120
Tinggi, y (cm)				
Luas tapak, z (cm ²)	40	60	80	100
yz				

(C) Jika x , y dan z ialah pemboleh ubah				
Isi padu, x (cm ³)	80	180	320	500
Tinggi, y (cm)				
Luas tapak, z (cm ²)	20	30	40	50
$\frac{yz}{x}$				

Perbincangan:

1. Apakah nilai $\frac{x}{y}$? Seterusnya, nyatakan hubungan antara y dengan x jika z ialah pemalar.
2. Apakah nilai yz ? Seterusnya, nyatakan hubungan antara y dengan z jika x ialah pemalar.
3. Apakah nilai $\frac{yz}{x}$? Seterusnya, nyatakan hubungan antara y , x dan z jika ketiga-tiganya ialah pemboleh ubah.

Hasil daripada Mobilisasi Minda 8, didapati bahawa, y berubah secara langsung dengan x , dan y berubah secara songsang dengan z . Maka, y adalah berubah secara langsung dengan x dan secara songsang dengan z , iaitu $y \propto \frac{x}{z}$.

Secara umumnya,

Bagi suatu **ubahan bergabung**, y berubah secara langsung dengan x^m dan secara songsang dengan z^n , boleh ditulis sebagai

$$\left. \begin{array}{l} y \propto \frac{x^m}{z^n} \text{ (hubungan ubahan)} \\ y = \frac{kx^m}{z^n} \text{ (bentuk persamaan)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dengan keadaan} \\ m = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ dan} \\ k \text{ ialah pemalar.} \end{array}$$

Contoh 22

Diberi bahawa y berubah secara langsung dengan kuasa dua x dan secara songsang dengan punca kuasa dua z . Jika $y = 8$ apabila $x = 4$ dan $z = 36$, ungkapkan y dalam sebutan x dan z .

Penyelesaian:

$$y \propto \frac{x^2}{\sqrt{z}}$$

$$y = \frac{kx^2}{\sqrt{z}} \quad \leftarrow \text{Tuliskan hubungan antara } y, x \text{ dan } z \text{ dalam bentuk persamaan.}$$

$$8 = \frac{k(4)^2}{\sqrt{36}} \quad \leftarrow \text{Gantikan nilai-nilai } y, x \text{ dan } z \text{ ke dalam persamaan untuk mendapatkan nilai } k.$$

$$k = \frac{8\sqrt{36}}{4^2} \\ = 3$$

$$\text{Maka, } y = \frac{3x^2}{\sqrt{z}}$$

Tip Bestari

- (i) y berubah secara langsung dengan w dan kuasa tiga x , dan secara songsang dengan punca kuasa tiga z ,

$$y \propto \frac{wx^3}{\sqrt[3]{z}}$$

- (ii) y berubah secara langsung dengan hasil darab w^2 dan $\sqrt{x}$, dan secara songsang dengan z^3 ,

$$y \propto \frac{w^2\sqrt{x}}{z^3}$$

Contoh 23

Jadual di bawah menunjukkan hubungan antara P , Q dan R . Diberi P berubah secara langsung dengan kuasa tiga Q dan secara songsang dengan R . Hitung nilai x dan nilai y .

P	4	3.6	0.081
Q	2	6	y
R	0.6	x	2.7

Penyelesaian:

$$P \propto \frac{Q^3}{R}$$

$$P = \frac{kQ^3}{R}$$

$$4 = \frac{k(2)^3}{0.6}$$

$$k = \frac{4(0.6)}{2^3} = \frac{3}{10}$$

Maka, $P = \frac{3Q^3}{10R}$

Apabila $P = 3.6$, $Q = 6$
dan $R = x$,

$$P = \frac{3Q^3}{10R}$$

$$3.6 = \frac{3(6)^3}{10x}$$

$$x = \frac{3(6)^3}{10(3.6)}$$

$$= 18$$

Apabila $P = 0.081$, $Q = y$
dan $R = 2.7$,

$$P = \frac{3Q^3}{10R}$$

$$0.081 = \frac{3(y)^3}{10(2.7)}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{0.081(10)(2.7)}{3}}$$

$$= 0.9$$

Latih Kendiri 1.3a

- Tuliskan setiap ubahan bergabung berikut dalam bentuk ubahan dan bentuk persamaan.
 - w berubah secara langsung dengan punca kuasa tiga v dan secara songsang dengan kuasa dua x .
 - F berubah secara langsung dengan G dan H^3 , dan secara songsang dengan $\sqrt{t}$.
 - Pecutan bagi sebuah objek, A berubah secara langsung dengan jarak yang dilalui, j , dan secara songsang dengan kuasa dua masa yang diambil, t , oleh objek itu.
- Masa yang digunakan, t jam, untuk menyusun kerusi di dewan berubah secara langsung dengan bilangan kerusi, c buah, dan secara songsang dengan bilangan pekerja yang terlibat, p orang. Diberi bahawa 5 orang pekerja menggunakan masa 2 jam untuk menyusun 1 000 buah kerusi. Ungkapkan t dalam sebutan c dan p .
- Diberi M berubah secara langsung dengan kuasa dua N dan secara songsang dengan P . Jika $M = 4.8$ apabila $N = 6$ dan $P = 1.5$, hitung
 - nilai P apabila $M = 0.8$ dan $N = 2.4$,
 - nilai N apabila $M = 19$ dan $P = 3.8$.
- Jadual di sebelah menunjukkan perubahan tiga kuantiti, T , e dan f . Diberi T berubah secara songsang dengan punca kuasa dua e dan kuasa tiga f . Hitung nilai a dan nilai b .

T	5	a	0.256
e	1.44	36	b
f	2	0.4	5

Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan ubahan bergabung?

Contoh 24

Tekanan, $p \text{ N m}^{-2}$, pada roda kereta sorong berubah secara langsung dengan jisim kereta sorong, $m \text{ kg}$, dan secara songsang dengan luas permukaan sentuhan roda dengan tanah, $l \text{ m}^2$. Diberi bahawa tekanan roda ialah $45\,000 \text{ N m}^{-2}$ apabila jisim kereta sorong ialah 90 kg dan luas permukaan sentuhan roda dengan tanah ialah 0.02 m^2 .

- Hitung nilai p apabila $m = 120$ dan $l = 0.5$.
- Apakah yang boleh dilakukan supaya tekanan pada roda berkurangan jika jisim kereta sorong adalah tetap?

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan ubahan bergabung.



Penyelesaian:

Memahami masalah

- p berubah secara langsung dengan m dan secara songsang dengan l
- Apabila $m = 90$ dan $l = 0.02$,
 $p = 45\,000$

Merancang strategi

- Tentukan hubungan antara p dengan m dan l dalam bentuk persamaan. Kemudian, gantikan nilai $m = 120$ dan $l = 0.5$ ke dalam persamaan untuk menghitung nilai p .
- Memahami perubahan bagi setiap pemboleh ubah dalam persamaan.

Membuat kesimpulan

- $p = 2\,400 \text{ N m}^{-2}$
- Gunakan roda yang lebih lebar kerana tekanan pada roda berkurangan apabila luas permukaan sentuhan roda bertambah dengan keadaan jisim adalah tetap.

Melaksanakan strategi

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad p &\propto \frac{m}{l} \\
 p &= \frac{km}{l} \\
 45\,000 &= \frac{k(90)}{0.02} \\
 k &= \frac{(0.02)(45\,000)}{90} \\
 &= 10 \\
 \text{Maka, } p &= \frac{10m}{l}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Apabila } m = 120, l = 0.5, \\
 p &= \frac{(10)(120)}{0.5} \\
 &= 2\,400 \text{ N m}^{-2}
 \end{aligned}$$

- Jika nilai m adalah tetap,
 - p berkurang, apabila l bertambah
 - p bertambah, apabila l berkurang

Latih Kendiri 1.3b

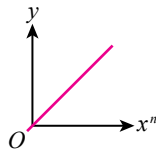
-  Encik Kamal ingin memasang jubin berbentuk segi empat tepat di bilik tidurnya. Bilangan jubin yang diperlukan, J , berubah secara songsang dengan panjang, p m dan lebar, l m, jubin yang digunakan. Encik Kamal memerlukan 120 keping jubin jika jubin berukuran panjang 0.4 m dan lebar 0.5 m digunakan.
 - Hitung bilangan jubin yang diperlukan jika panjang ialah 0.2 m dan lebar ialah 0.3 m.
 - Jika luas jubin bertambah, apakah perubahan yang akan berlaku pada bilangan jubin yang diperlukan?
-  Purata bilangan panggilan telefon harian, C , di antara dua buah bandar berubah secara langsung dengan populasi kedua-dua buah bandar, P_1 dan P_2 , dan secara songsang dengan kuasa dua jarak, j , di antara dua buah bandar tersebut. Jarak di antara bandar A dengan bandar B ialah 210 km. Purata bilangan panggilan telefon harian di antara dua buah bandar itu ialah 15 750 dan populasi bandar A dan bandar B masing-masing ialah 105 000 penduduk dan 220 500 penduduk. Dengan memberikan jawapan kepada nombor bulat terhampir, hitung
 - jarak di antara bandar P dengan bandar Q jika populasi masing-masing ialah 83 400 penduduk dan 62 000 penduduk dan purata bilangan panggilan telefon harian ialah 19 151,
 - populasi penduduk bandar J jika populasi penduduk bandar K ialah 1 100 000 penduduk dengan jarak di antara dua bandar tersebut ialah 351 km. Purata bilangan panggilan telefon harian di antara bandar J dengan bandar K ialah 18 857.

UBAHAN

Ubahan Langsung

y berubah secara langsung dengan x^n ,
bagi $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

- $y \propto x^n$
- $y = kx^n$ dengan keadaan k ialah pemalar dan $k = \frac{y}{x^n}$
- Graf y melawan x^n ialah satu garis lurus yang melalui asalan

**Ubahan Tercantum**

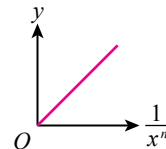
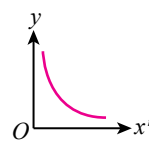
Satu ubahan langsung dengan keadaan satu pemboleh ubah berubah sebagai hasil darab dua atau lebih pemboleh ubah yang lain.

- y berubah secara tercantum dengan x^m dan z^n , bagi $m = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ dan $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
- $y \propto x^m z^n$
- $y = kx^m z^n$ dengan keadaan k ialah pemalar dan $k = \frac{y}{x^m z^n}$

Ubahan Songsang

y berubah secara songsang dengan x^n ,
bagi $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

- $y \propto \frac{1}{x^n}$
- $y = \frac{k}{x^n}$ dengan keadaan k ialah pemalar dan $k = yx^n$
- Graf y melawan $\frac{1}{x^n}$ ialah satu garis lurus yang bermula daripada asalan ($x \neq 0$)



y berubah secara songsang dengan x^n

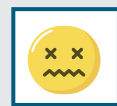
Ubahan Bergabung

Melibatkan gabungan ubahan langsung atau ubahan tercantum, dan ubahan songsang.

- Bagi $p = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, $q = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ dan $r = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
 - (i) $y \propto \frac{x^p}{z^q}$
 $y = \frac{kx^p}{z^q}$
 - (ii) $y \propto \frac{w^p x^q}{z^r}$
 $y = \frac{k w^p x^q}{z^r}$

dengan keadaan k ialah pemalar.

Refleksi



Pada akhir bab ini, saya dapat

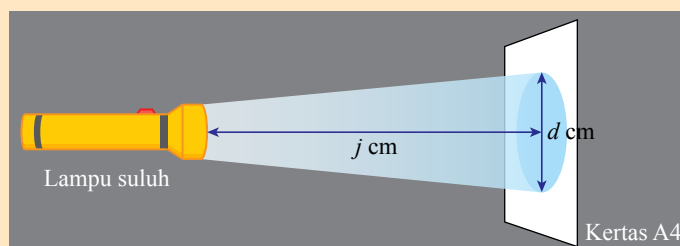
menerangkan maksud ubahan langsung.		
menentukan hubungan antara dua pemboleh ubah bagi suatu ubahan langsung.		
menentukan hubungan antara tiga atau lebih pemboleh ubah bagi suatu ubahan tercantum.		
menyelesaikan masalah yang melibatkan ubahan langsung.		
menerangkan maksud ubahan songsang.		
menentukan hubungan antara dua pemboleh ubah bagi suatu ubahan songsang.		
menyelesaikan masalah yang melibatkan ubahan songsang.		
menentukan hubungan antara tiga atau lebih pemboleh ubah bagi suatu ubahan bergabung.		
menyelesaikan masalah yang melibatkan ubahan bergabung.		

PROJEK MINI

Bahan: Lampu suluh, kertas A4, tali ukur

Langkah:

1. Lakukan projek ini secara berkumpulan. Tampal kertas A4 dan letakkan lampu suluh tegak menghala ke kertas seperti yang ditunjukkan dalam rajah di bawah. Lakukan dalam kelas yang gelap.



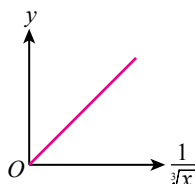
2. Dengan jarak lampu suluh dari kertas A4, j , yang berbeza seperti 10 cm, 20 cm, 30 cm, ... , rekod diameter imej cahaya lampu, d , yang terhasil pada kertas tersebut. Bina satu jadual untuk merekod data anda.
3. Wakilkan data yang diperolehi menggunakan graf garis yang sesuai.
4. Tulis satu rumus yang menunjukkan hubungan antara d dengan j . Kemudian, nyatakan satu kesimpulan tentang diameter imej cahaya lampu yang terhasil dengan jarak lampu suluh dari kertas.
5. Bagaimanakah kajian ini boleh diaplikasikan dalam kehidupan seharian anda?

Latih Ekstensif

Imbas kod QR atau layari
bit.do/Kuiz01 untuk kuiz interaktif



FAHAM

- Tulis hubungan ubahan bagi setiap yang berikut.
 - w berkadaran langsung dengan kuasa tiga x .
 - a berubah secara langsung dengan b dan secara songsang dengan kuasa tiga c .
 - p berubah secara langsung dengan q dan punca kuasa dua r .
 - Jarak yang dilalui, s m oleh sebuah basikal berubah secara langsung dengan pecutannya, a m s⁻² dan kuasa dua masa yang diambil, t s.
- Rajah di sebelah menunjukkan graf y melawan $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Tuliskan hubungan antara y dengan $\sqrt[3]{x}$ menggunakan simbol $\propto$.
 
- Tuliskan hubungan ubahan berikut dalam bentuk ayat.
 - $y \propto xz$
 - $e \propto \frac{1}{f}$
 - $p \propto \frac{\sqrt[3]{q}}{r}$
 - $n \propto \frac{pq^2}{\sqrt{r}}$
- Nyatakan sama ada setiap yang berikut mempunyai hubungan y berubah secara langsung dengan x atau tidak.
 - $x - y = 0$
 - $y + 3 = x$
 - $xy = 10$
 - $\frac{x}{y} = 0.5$

MASTERI

- Hitung pemalar, k bagi setiap yang berikut.
 - L berubah secara langsung dengan kuasa tiga m . $L = 16.384$ apabila $m = 3.2$.
 - h berubah secara langsung dengan a dan kuasa dua b . $h = 96$ apabila $a = 18$ dan $b = 4$.
 - P berubah secara langsung dengan q^2 dan r , dan secara songsang dengan $\sqrt[3]{s}$. $P = 17.01$ apabila $q = 4.5$, $r = 9$ dan $s = 3$ 375.
- Diberi m berubah secara songsang dengan n dan p . Jika $m = 6$ apabila $n = 0.4$ dan $p = 5$, tuliskan satu persamaan yang menghubungkan m , n dan p .
- Diberi $f \propto g^2h$ dan $f = 24$ apabila $g = 4$ dan $h = 5$. Hitung nilai g apabila $f = 5.88$ dan $h = 10$.
- Jadual di sebelah menunjukkan perubahan tiga kuantiti. Diberi y berubah secara langsung dengan x dan secara songsang dengan punca kuasa dua z . Hitung nilai m dan nilai n .

y	4	m	51
x	0.3	6	1.7
z	3.24	225	n

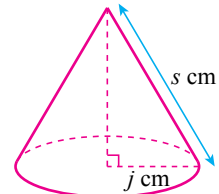
CABAR

- P berubah secara songsang dengan Q dan $Q = 3R - 2$. Diberi $P = 0.02$ apabila $R = 4$.
 - Ungkapkan P dalam sebutan Q .
 - Hitung nilai R apabila $P = 5$.

10. Arus elektrik, I (Ampere) berubah secara langsung dengan kuasa, P (Watt) dan secara songsang dengan voltan, V (Volt) bagi suatu peralatan elektrik. Diberi bahawa sebuah pengering rambut dengan kuasa 550 W dan voltan 240 V menggunakan arus elektrik 2.2 A. Hitung arus elektrik yang digunakan oleh sebuah kipas dengan kuasa 75 W dan voltan 240 V.

11. Luas permukaan melengkung, L cm², sebuah kon berubah secara langsung dengan jejari tapaknya, j cm, dan tinggi condong, s cm. Diberi $L = 88$ cm² apabila $j = 3.5$ cm dan $s = 8$ cm.

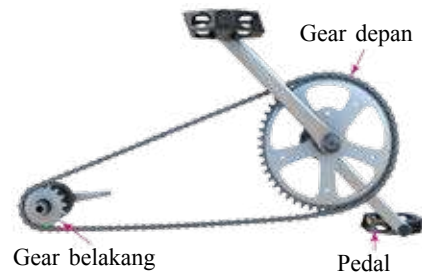
- Hitung nilai L apabila $j = 5$ cm dan $s = 9.8$ cm.
- Apakah perubahan pada luas permukaan melengkung jika tinggi condongnya berkurang dan jejari tapak adalah tetap?



12. Diberi Y berubah secara langsung dengan X dan secara songsang dengan W . Jika $Y = 0.9$ apabila $X = 18$ dan $W = 5$, hitung

- nilai W apabila $Y = 20$ dan $X = 6$,
- peratusan ubahan bagi Y apabila X bertambah sebanyak 10% dan W berkurang sebanyak 20%.

13. Kelajuan, S , sebuah basikal berubah secara langsung dengan bilangan putaran pedal basikal per minit, P , dan bilangan gigi gear depan, d , dan secara songsang dengan bilangan gigi gear belakang, b . Santhami menunggang sebuah basikal pada kelajuan 26.4 km per jam. Putaran pedal basikalnya ialah 75 putaran per minit dengan bilangan gigi gear depan ialah 40 dan gear belakang ialah 20. Huraikan perubahan laju basikal Santhami jika dia meningkatkan putaran pedal basikalnya kepada 90 putaran per minit.



TEROKAI MATEMATIK

Konsep ubahan banyak digunakan dalam bidang sains. Antaranya adalah seperti berikut:

Hukum Ohm
 $V = IR$

Hukum Pembiasan
 $\frac{\sin i}{\sin r} = \text{pemalar}$

Hukum Boyle
 $PV = \text{pemalar}$

Hukum Kegravitian
Semesta Newton
 $F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$

Secara berkumpulan, cari maklumat di Internet berkaitan kuantiti yang diwakili pemboleh ubah bagi rumus di atas dan bagaimana hukum-hukum tersebut menggunakan konsep ubahan. Tuliskan penggunaan rumus tersebut secara ringkas. Kemudian, lakukan kajian dengan lebih lanjut tentang aplikasi konsep ubahan dalam bidang kewangan, alam sekitar, dan sains sosial secara ringkas. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda untuk berkongsi maklumat antara kumpulan lain.

BAB 2

Matriks

Apakah yang akan anda pelajari?

- Matriks
- Operasi Asas Matriks

Maslahat Bab Ini

Matriks digunakan dalam bidang matematik untuk mewakili dan menyelesaikan masalah dalam algebra, statistik dan geometri. Dalam kehidupan harian, seorang pengurus belian boleh mencatat jumlah inventori dalam perniagaan.

Tahukah Anda?

Arthur Cayley (1821-1895) seorang ahli matematik Inggeris yang membangunkan teori matriks dari aspek algebra dalam karyanya *A Memoir on the Theory of Matrices*. Cayley mencipta matriks semasa membuat kajian tentang teori transformasi. Dua orang ahli matematik Amerika Syarikat, Benjamin Peirce (1809-1880) dan Charles S. Peirce (1839-1914) turut bersama-sama Cayley dalam pembangunan matriks algebra.



Untuk maklumat lanjut:



bit.do/TahukahAndaBab2

GERBANG ISTILAH



matriks
matriks baris
matriks identiti
matriks lajur
matriks segi empat sama
matriks segi empat tepat
matriks sifar
matriks songsang
pendaraban skalar
penentu
peringkat
unsur

matrix
row matrix
identity matrix
column matrix
square matrix
rectangular matrix
zero matrix
inverse matrix
scalar multiplication
determinant
order
element



Mengikut Laporan Digital 2018, jumlah pengguna Internet mencatatkan 25.08 juta orang iaitu 79% penduduk di Malaysia. Masyarakat kini lebih cenderung menjalani urusan seharian seperti membeli-belah, membuat bayaran perkhidmatan dan sebagainya melalui Internet. Pelbagai data telah dihasilkan dalam proses ini dan menyokong pertumbuhan Data Raya (*Big Data*).

Data Raya merujuk kepada data yang bersaiz sangat besar, kompleks dan sukar diproses dengan pengurusan pangkalan data biasa. Koleksi data ini dapat membantu pihak pengurusan pelbagai bidang untuk membuat keputusan yang lebih bijak. Dalam bidang perniagaan, data raya dianalisis untuk mengurangkan kos dan masa, membangunkan produk baharu serta menyusun langkah-langkah perniagaan yang strategik. Proses menganalisis data ini banyak melibatkan matriks.

2.1 Matriks

 Bagaimanakah mewakili maklumat situasi sebenar dalam bentuk matriks?

Kedai Elektrik Sinar Jaya mencatatkan jualan tiga jenis kipas angin dengan menggunakan hamparan elektronik. Rajah di bawah menunjukkan jualan kipas angin di kedai dan dalam talian bagi bulan Mac hingga Mei. Bagaimanakah data ini boleh disusun?

Standard Pembelajaran

Mewakili maklumat situasi sebenar dalam bentuk matriks.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		Jualan kipas angin bulan Mac				Jualan kipas angin bulan April				Jualan kipas angin bulan Mei		
2		Kipas Angin				Kipas Angin				Kipas Angin		
3		Berdiri	Siling	Dinding		Berdiri	Siling	Dinding		Berdiri	Siling	Dinding
4	Di kedai	16	18	11		20	15	9		15	21	10
5	Dalam talian	5	10	4		7	12	5		10	24	10
6												
7		Jumlah jualan bulan Mac dan April				Perbezaan jualan bulan April dan Mei						
8		Kipas Angin				Kipas Angin						
9		Berdiri	Siling	Dinding		Berdiri	Siling	Dinding				
10	Di kedai	36	33	20		-5	6	1				
11	Dalam talian	12	22	9		3	12	5				
12												

Data bulan Mac yang diwakilkan dalam bentuk jadual boleh juga diwakilkan dalam bentuk matriks seperti yang ditunjukkan di bawah.

	Kipas Angin		
	Berdiri	Siling	Dinding
Di kedai	16	18	11
Dalam talian	5	10	4

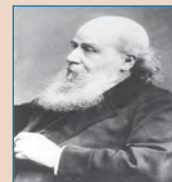
Bentuk jadual

$$\begin{matrix} \text{baris} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix} \\ & & \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & \text{lajur} & \end{matrix} \end{matrix}$$

Bentuk matriks

Matriks ialah nombor-nombor yang disusun dalam baris dan lajur untuk membentuk satu tatasusun segi empat tepat atau segi empat sama.

Matriks lazimnya diwakili dengan huruf besar dan ditulis dalam tanda kurung [] atau ().



James Joseph Sylvester (1814-1897) merupakan ahli matematik yang pertama kali menggunakan istilah matriks pada tahun 1850.

Contoh 1

Wakilkan maklumat berikut dalam bentuk matriks.

- (a) Jadual di bawah menunjukkan keperluan kalori harian bagi perempuan mengikut kategori.

	Kanak-kanak	Remaja	Dewasa	Warga Emas
Keperluan kalori harian (kcal)	1 700	2 100	2 000	1 800

- (b) Jadual di bawah menunjukkan pungutan pingat oleh kontinjen Malaysia untuk tiga acara dalam Temasya Sukan SEA ke-29.

	Emas	Perak	Gangsa
Acara Terjun	13	5	1
Pencak Silat	10	2	4
Olahraga	8	8	9

- (c) Dalam Ujian 1, Samad telah mendapat 76 markah untuk Bahasa Melayu, 82 markah untuk Matematik dan 72 markah untuk Sejarah. Hamid pula telah mendapat 80 markah untuk Bahasa Melayu, 88 markah untuk Matematik dan 70 markah untuk Sejarah.

Penyelesaian:

(a) baris 1 $\rightarrow$ $[1700 \ 2100 \ 2000 \ 1800]$ atau $\begin{bmatrix} 1700 \\ 2100 \\ 2000 \\ 1800 \end{bmatrix}$

Ini matriks baris. Matriks baris mempunyai hanya satu baris.

lajur 1

Ini matriks lajur. Matriks lajur mempunyai hanya satu lajur.

(b) baris 1 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 13 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
 baris 2 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
 baris 3 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 13 & 10 & 8 \\ 5 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

lajur 1 lajur 2 lajur 3

Ini matriks segi empat sama. Matriks segi empat sama mempunyai bilangan baris dan bilangan lajur yang sama.

(c) baris 1 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 76 & 80 \end{bmatrix}$
 baris 2 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 82 & 88 \end{bmatrix}$
 baris 3 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 72 & 70 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 76 & 82 & 72 \\ 80 & 88 & 70 \end{bmatrix}$

lajur 1 lajur 2 lajur 3

Ini matriks segi empat tepat. Matriks segi empat tepat mempunyai bilangan baris dan bilangan lajur yang berbeza.

Buletin Ilmiah

Kalori ialah ukuran nilai tenaga dalam makanan. Kandungan kalori suatu makanan bergantung pada kandungan karbohidrat, protein dan lemak di dalamnya. Misalnya, 1 g protein bersamaan 4 kcal.

Oh! Malaysiaku

Dalam Temasya Sukan SEA ke-29 yang diadakan di Kuala Lumpur pada tahun 2017, kontinjen Malaysia berjaya menjadi juara keseluruhan dengan pencapaian 145 pingat emas.

Minda Kritis

Adakah [6] merupakan matriks segi empat sama? Jelaskan jawapan anda.

Latih Kendiri 2.1a



1. Suatu pameran teknologi mudah alih generasi kelima (5G) telah dikunjungi oleh 857 orang remaja, 3 180 orang dewasa dan 211 orang warga emas. Wakilkan maklumat tersebut dalam bentuk matriks.

2. Jadual di sebelah menunjukkan purata bacaan Indeks Pencemaran Udara (IPU) di Putrajaya, Jerantut dan Sandakan selama tiga hari. Wakilkan maklumat tersebut dalam bentuk matriks.

	Isnin	Selasa	Rabu
Putrajaya	53	52	50
Jerantut	20	21	20
Sandakan	47	48	46

3. Jadual di bawah menunjukkan purata bilangan buku yang dibaca oleh murid dalam Program Nilam di SMK Setia bagi tahun 2019.

	Tingkatan 3	Tingkatan 4	Tingkatan 5
Bahasa Melayu	20	18	15
Bahasa Inggeris	12	10	11

Wakilkan maklumat di atas dalam bentuk matriks.

Bagaimanakah menentukan peringkat matriks dan seterusnya mengenal pasti unsur tertentu dalam matriks?

Peringkat matriks boleh ditentukan dengan menulis bilangan baris dan bilangan lajur matriks itu. Misalnya,

$$\begin{array}{l} \text{baris 1} \longrightarrow \\ \text{baris 2} \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 lajur 1 lajur 2 lajur 3

Matriks ini mempunyai 2 baris dan 3 lajur. Jadi, ini ialah matriks peringkat 2×3 dan dibaca sebagai “matriks 2 dengan 3”.

Standard Pembelajaran

Menentukan peringkat matriks dan seterusnya mengenal pasti unsur tertentu dalam suatu matriks.

Matriks dengan m baris dan n lajur mempunyai peringkat $m \times n$ dan dibaca sebagai “matriks m dengan n ”.

Setiap nombor dalam matriks dikenali sebagai **unsur** matriks itu. Misalnya, unsur pada baris ke-2 dan lajur ke-3 bagi matriks $\begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$ ialah 4.

Huruf besar digunakan untuk mewakili suatu matriks, misalnya $A = \begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$, dan unsur pada baris ke-2 dan lajur ke-3 boleh diwakili dengan a_{23} , misalnya $a_{23} = 4$.

Secara umumnya, unsur pada baris ke- i dan lajur ke- j dalam matriks A boleh diwakili oleh

a_{ij}
 baris ke- i lajur ke- j

maka, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Buletin Ilmiah

a_{21} dibaca sebagai "a dua satu"

Buletin Ilmiah

Matriks baris mempunyai peringkat $1 \times n$ manakala matriks lajur mempunyai peringkat $m \times 1$.

Contoh 2

Diberi tiga matriks, $P = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 9 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $R = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 8 \\ -4 & 11 & 6 & 1 \\ 9 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. Tentukan

- (a) peringkat setiap matriks itu,
- (b) unsur
 - (i) baris pertama dan lajur ke-3 matriks P , p_{13} ,
 - (ii) baris ke-2 dan lajur pertama matriks Q , q_{21} ,
 - (iii) baris ke-3 dan lajur ke-4 matriks R , r_{34} .

Penyelesaian:

- (a) Peringkat matriks P ialah 1×3 .
 Peringkat matriks Q ialah 2×1 .
 Peringkat matriks R ialah 4×4 .

- (b) (i) p_{13} bagi matriks P ialah 9.
 (ii) q_{21} bagi matriks Q ialah 5.
 (iii) r_{34} bagi matriks R ialah 1.

baris 1 $\rightarrow [3 \quad -7 \quad 9]$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 lajur 1 lajur 2 lajur 3

Matriks ini mempunyai 1 baris dan 3 lajur.

Contoh 3

Diberi matriks $D = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$, tentukan

- (a) peringkat matriks,
- (b) unsur d_{11} , d_{21} dan d_{32} .

Penyelesaian:

- (a) 3×2

- (b) $d_{11} = -2$ $\leftarrow d_{11}$ ialah unsur pada baris pertama dan lajur pertama.

$d_{21} = 0$ $\leftarrow d_{21}$ ialah unsur pada baris ke-2 dan lajur pertama.

$d_{32} = 9$ $\leftarrow d_{32}$ ialah unsur pada baris ke-3 dan lajur ke-2.



Cuthbert Edmund Cullis (1875-1954) ialah seorang ahli matematik Inggeris yang memperkenalkan kurungan untuk matriks pada tahun 1913. Cullis menggunakan tatatanda $A = [a_{ij}]$ untuk mewakili unsur pada baris ke- i dan lajur ke- j dalam matriks.

Latih Kendiri 2.1b

1. Tentukan peringkat bagi matriks-matriks berikut.

(a) $[15 \quad -8]$ (b) $\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 8 & 0 & 2 \\ 5 & 11 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 12 & 9 & 1 \\ 5 & 10 & 7 \end{bmatrix}$

2. Untuk setiap matriks berikut, tentukan

- (i) peringkat matriks,
- (ii) unsur pada baris ke-2 dan lajur ke-2,
- (iii) unsur pada baris ke-3 dan lajur pertama.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 16 & 0 \\ 9 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

3. Diberi matriks $F = \begin{bmatrix} -8 & 14 & 2 \\ 7 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, tentukan peringkat matriks F . Kemudian, kenal pasti unsur f_{13} , f_{22} dan f_{11} .

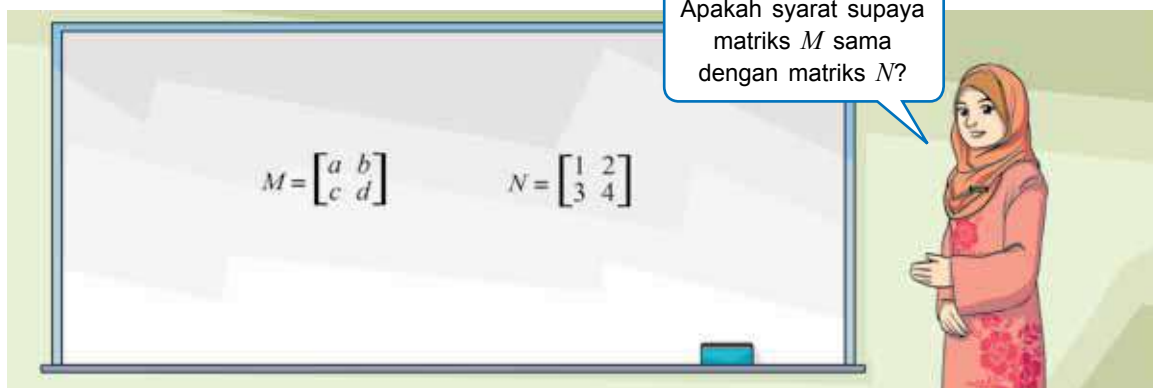
4. Diberi matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & -16 \\ 20 & 4 \end{bmatrix}$, hitung nilai $b_{12} + b_{21}$.

 **Bagaimanakah menentukkan sama ada dua matriks adalah sama?**

Standard Pembelajaran

Menentukan sama ada dua matriks adalah sama.

Perhatikan dua matriks di bawah.



Didapati matriks M dan matriks N mempunyai peringkat yang sama iaitu 2×2 dan jika setiap unsur sepadannya adalah sama, iaitu $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ dan $d = 4$, maka matriks M dan matriks N adalah **sama** dan boleh ditulis sebagai $M = N$.

$M = N$ jika dan hanya jika kedua-dua matriks mempunyai peringkat yang sama dan setiap unsur sepadannya sama.

Contoh 4

Tentukan sama ada setiap pasangan matriks berikut adalah sama. Berikan sebab anda.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $C = [3 \quad 9]$ dan $D = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$ dan $F = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $G = \begin{bmatrix} 0.5 & -2 \\ 6 & 0.8 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$ dan $H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 6 & \frac{4}{5} \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

- (a) $A = B$ kerana kedua-dua matriks mempunyai peringkat yang sama dan setiap unsur sepadannya sama.
- (b) $C \neq D$ kerana kedua-dua matriks tidak mempunyai peringkat yang sama. Peringkat C ialah 1×2 manakala peringkat D ialah 2×1 .
- (c) $E \neq F$ kerana unsur sepadannya tidak sama.
- (d) $G = H$ kerana kedua-dua matriks mempunyai peringkat yang sama dan setiap unsur sepadannya sama.

Contoh 5

Diberi bahawa matriks $P = \begin{bmatrix} x & 7 \\ 0 & 5 - 3z \end{bmatrix}$ dan matriks $Q = \begin{bmatrix} 5 & y + 1 \\ 0 & 2z \end{bmatrix}$. Tentukan nilai x , nilai y dan nilai z jika $P = Q$.

Penyelesaian:

$P = Q$, maka semua unsur sepadan adalah sama.

$$\begin{array}{rcl} x = 5 & , & 7 = y + 1 & , & 5 - 3z = 2z \\ & & y = 7 - 1 & & 5 = 5z \\ & & y = 6 & & z = 1 \end{array}$$

Latih Kendiri 2.1c

1. Tentukan sama ada setiap pasangan matriks berikut adalah sama.

(a) $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0.1 & 6 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 6 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 12 \\ -7 \end{bmatrix}$ dan $[12 \quad -7]$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

2. Diberi $P = Q$, hitung nilai x , nilai y dan nilai z .

(a) $P = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & y \\ 2z - 3 & -5 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 3 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

(b) $P = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 6y + 5 & 3z + 4 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 5x & -1 \\ 2y - 9 & -4x \end{bmatrix}$

2.2 Operasi Asas Matriks

 Bagaimanakah menambah dan menolak matriks?

Standard Pembelajaran

Menambah dan menolak matriks.

 Bagaimanakah data ini ditambah atau ditolak?

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Jualan kipas angin bulan Mac				Jualan kipas angin bulan April				Jualan kipas angin bulan Mei		
2	Kipas Angin				Kipas Angin				Kipas Angin		
3	Berdiri	Siling	Dinding		Berdiri	Siling	Dinding		Berdiri	Siling	Dinding
4	Di kedai	16	18	11	20	15	9		15	21	10
5	Dalam talian	5	10	4	7	12	5		10	24	10
6											
7	Jumlah jualan bulan Mac dan April				Perbezaan jualan bulan April dan Mei						
8	Kipas Angin				Kipas Angin						
9	Berdiri	Siling	Dinding		Berdiri	Siling	Dinding				
10	Di kedai	36	33	20	-5	6	1				
11	Dalam talian	12	22	9	3	12	5				
12											

Perhatikan hamparan elektronik di atas yang menunjukkan jualan kipas angin di Kedai Elektrik Sinar Jaya. Jualan kipas angin bulan Mac, April dan Mei masing-masing boleh diwakili oleh

matriks $P = \begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$, matriks $Q = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix}$ dan matriks $R = \begin{bmatrix} 15 & 21 & 10 \\ 10 & 24 & 10 \end{bmatrix}$.

Jumlah jualan bulan Mac dan April boleh diperolehi dengan menambah matriks P dan matriks Q , iaitu

$$\begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 33 & 20 \\ 12 & 22 & 9 \end{bmatrix}.$$

Perbezaan jualan antara bulan April dengan Mei juga boleh ditentukan dengan membuat penolakan matriks R dan matriks Q , iaitu

$$\begin{bmatrix} 15 & 21 & 10 \\ 10 & 24 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 1 \\ 3 & 12 & 5 \end{bmatrix}.$$

Penambahan dan penolakan matriks hanya boleh dilaksanakan pada matriks yang **sama peringkat**.

Unsur yang sepadan ditambah atau ditolak untuk mendapat satu matriks tunggal yang sama peringkat.

Bagi matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix}.$$

Contoh 6

Tentukan sama ada penambahan dan penolakan boleh dilaksanakan pada pasangan matriks berikut. Berikan sebab anda.

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 8 & 11 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad C = [1 \quad 12] \text{ dan } D = [0 \quad -4]$$

$$(c) \quad E = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } F = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 13 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad G = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ dan } H = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 16 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

- (a) Tidak boleh kerana peringkat matriks A dan B adalah tidak sama.
 (b) Boleh kerana peringkat matriks C dan D adalah sama.
 (c) Boleh kerana peringkat matriks E dan F adalah sama.
 (d) Tidak boleh kerana peringkat matriks G dan H adalah tidak sama.

Contoh 7

Diberi matriks $C = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 6 & -11 & 7 \end{bmatrix}$, matriks $D = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$, matriks $P = \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{6} & 6 \\ 7.4 & -13 & 5 \\ 1 & 9 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

dan matriks $Q = \begin{bmatrix} 18 & \frac{1}{3} & -7 \\ 2.5 & -8 & 3 \\ 12 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$. Hitung

$$(a) \quad C + D$$

$$(b) \quad P - Q$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} (a) \quad C + D &= \begin{bmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 6 & -11 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 + 14 & -8 + (-2) & 4 + 1 \\ 6 + (-3) & -11 + 5 & 7 + 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 24 & -10 & 5 \\ 3 & -6 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Menambah unsur yang sepadan

$$\begin{aligned} (b) \quad P - Q &= \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{6} & 6 \\ 7.4 & -13 & 5 \\ 1 & 9 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & \frac{1}{3} & -7 \\ 2.5 & -8 & 3 \\ 12 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 - 18 & \frac{5}{6} - \frac{1}{3} & 6 - (-7) \\ 7.4 - 2.5 & -13 - (-8) & 5 - 3 \\ 1 - 12 & 9 - 0 & \frac{1}{4} - 0.4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -20 & \frac{1}{2} & 13 \\ 4.9 & -5 & 2 \\ -11 & 9 & -0.15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Menolak unsur yang sepadan

i-Teknologi

Kalkulator saintifik boleh digunakan untuk membuat penambahan dan penolakan matriks. Imbas kod QR atau layari bit.do/Video201 untuk melihat video yang berkaitan.



Contoh 8

Diberi matriks $D = \begin{bmatrix} 2x - 1 & -3 \\ -12 & 5 + y \end{bmatrix}$, matriks $E = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 7 & y \end{bmatrix}$ dan $D + E = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$, hitung nilai x dan nilai y .

Penyelesaian:

$$D + E = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x - 1 & -3 \\ -12 & 5 + y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 2 \\ 7 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x - 1 + x & -3 + 2 \\ -12 + 7 & 5 + y + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x - 1 & -1 \\ -5 & 5 + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

Matriks sama

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 8 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 5 + 2y &= 13 \\ 2y &= 8 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Bandingkan unsur-unsur yang sepadan

Maka, $x = 3$ dan $y = 4$

Contoh 9

Diberi $F + \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, hitung matriks F .

Penyelesaian:

$$F + \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Buletin Ilmiah

Matriks yang diungkapkan dalam bentuk persamaan dikenali sebagai persamaan matriks. Misalnya, $A + B = C$.

Semak Jawapan

Gantikan matriks $F = \begin{bmatrix} -11 \\ 16 \end{bmatrix}$ ke dalam persamaan.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -11 \\ 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -11 + 16 - 7 \\ 16 + (-3) - 10 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Contoh 10

Jadual di sebelah menunjukkan catatan stok buku teks Tingkatan 4 bagi mata pelajaran Sains, Matematik dan Ekonomi di SMK Taman Suria. Hitung stok akhir bagi setiap jenis buku teks tersebut.

	Sains	Matematik	Ekonomi
Stok awal	326	335	82
Buku baharu diterima	56	47	15
Buku hilang dan rosak	32	26	11

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{Stok akhir} &= \text{Stok awal} + \text{Buku baharu diterima} - \text{Buku hilang dan rosak} \\ &= \begin{bmatrix} 326 & 335 & 82 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 56 & 47 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 32 & 26 & 11 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 350 & 356 & 86 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Maka, stok akhir buku teks Sains, Matematik dan Ekonomi masing-masing ialah 350, 356 dan 86.

Latih Kendiri 2.2a

1. Tentukan sama ada penambahan dan penolakan boleh dilaksanakan pada setiap pasangan matriks berikut.

$$(a) \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 13 & -1 & 11 \\ -2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 4 & -16 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ dan } [12 \quad -7] \quad (d) [2 \quad -9] \text{ dan } [1 \quad 6]$$

2. Diberi matriks $P = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ dan $R = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, hitung

$$(a) P - Q + R \quad (b) P + Q - R$$

3. Selesaikan setiap yang berikut.

$$(a) \begin{bmatrix} 12 & 10 & 1 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 18 & -3 \\ -7 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ -1 & 15 \end{bmatrix}$$

4. Diberi $\begin{bmatrix} 3a + 2 \\ 9 - b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -8 \end{bmatrix}$, hitung nilai a dan nilai b .

5. Diberi matriks $S = \begin{bmatrix} 4x + 1 & -5 \\ 6 - y & x \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 7 & 3y \end{bmatrix}$ dan $S - T = \begin{bmatrix} 10 & -11 \\ -2 & z \end{bmatrix}$, hitung nilai x , nilai y dan nilai z .

6. Diberi $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 9 & 6 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} - V = \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -1 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, hitung matriks V .

7. Encik Gopal mempunyai dua buah kedai, A dan B. Jadual di bawah menunjukkan pendapatan dan perbelanjaan jualan makanan dan minuman bagi kedua-dua buah kedainya pada bulan Jun.

Pendapatan		
	Makanan	Minuman
Kedai A	RM2 650	RM1 890
Kedai B	RM1 560	RM910

Perbelanjaan		
	Makanan	Minuman
Kedai A	RM930	RM850
Kedai B	RM540	RM260

Hitung jumlah keuntungan yang diperoleh Encik Gopal dari setiap kedainya pada bulan Jun. Tunjukkan pengiraan anda dalam bentuk matriks.

[Diberi bahawa keuntungan = pendapatan – perbelanjaan]

Bagaimanakah mendarab matriks dengan suatu nombor?

Standard Pembelajaran

Mendarab matriks dengan suatu nombor.



Pendaraban matriks dengan suatu nombor ialah satu proses **penambahan berulang**. Jika matriks A didarabkan dengan suatu nombor n , maka matriks A boleh ditambah dengan matriks A yang sama berulang sebanyak n kali, iaitu

$$nA = \underbrace{A + A + \dots + A}_{n \text{ kali}}$$

Rumus ini bermakna setiap unsur dalam matriks A ditambah dengan unsur yang sama berulang sebanyak n kali. Jadi, untuk mendarab suatu matriks dengan suatu nombor, darabkan setiap unsur dalam matriks itu dengan nombor tersebut.

Diberi matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan n ialah suatu nombor.

$$\text{Maka } nA = n \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} na & nb \\ nc & nd \end{bmatrix}.$$

n dikenali sebagai skalar.

Buletin Ilmiah

Apabila suatu matriks didarab dengan suatu nombor nyata, nombor nyata itu dinamakan skalar.

Pendaraban matriks dengan suatu nombor dikenali sebagai **pendaraban skalar**.

Contoh 11

Diberi $D = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, hitung

(a) $3D$

(b) $-\frac{1}{2}D$

Penyelesaian:

(a) $3D = 3 \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3(-5) & 3(4) \\ 3(2) & 3(1) \end{bmatrix}$$

Darabkan semua unsur dengan 3

$$= \begin{bmatrix} -15 & 12 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) $-\frac{1}{2}D = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)(-5) & \left(-\frac{1}{2}\right)(4) \\ \left(-\frac{1}{2}\right)(2) & \left(-\frac{1}{2}\right)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -2 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

MOBILISASI MINDA 1 Berkumpulan

Tujuan: Meneroka hukum operasi aritmetik dalam penambahan dan penolakan matriks.

Langkah:

1. Bahagikan kelas kepada kumpulan 4 orang murid.
2. Tentukan hasil penambahan dan penolakan dalam **Lembaran Aktiviti** di bawah.

Lembaran Aktiviti:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a)

Hukum Kalis Tukar Tertib	
$A + B$	$B + A$
$A - B$	$B - A$

(b)

Hukum Kalis Agihan	
$h(A + B)$	$hA + hB$
$h(A - B)$	$hA - hB$

(c)

Hukum Kalis Sekutuan	
$(A + B) + C$	$A + (B + C)$
$(A - B) - C$	$A - (B - C)$

(d)

Penambahan dan Penolakan Matriks Sifar	
$A + O$	$A - O$

Perbincangan:

Berdasarkan hasil dalam setiap jadual di atas, apakah kesimpulan yang diperoleh? Apakah kaitan antara proses penambahan dan penolakan matriks dengan hukum operasi aritmetik?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 1, didapati bahawa;

- (a) $A + B = B + A$. Penambahan matriks mematuhi **Hukum Kalis Tukar Tertib**.
 $A - B \neq B - A$. Penolakan matriks tidak mematuhi Hukum Kalis Tukar Tertib.
- (b) $h(A + B) = hA + hB$, $h(A - B) = hA - hB$.
 Penambahan dan penolakan matriks mematuhi **Hukum Kalis Agihan**.
- (c) $(A + B) + C = A + (B + C)$. Penambahan matriks mematuhi **Hukum Kalis Sekutuan**.
 $(A - B) - C \neq A - (B - C)$. Penolakan matriks tidak mematuhi Hukum Kalis Sekutuan.
- (d) Matriks dengan semua unsurnya adalah sifar dinamakan **matriks sifar**, misalnya $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Penambahan dan penolakan matriks A dengan matriks sifar, O ialah:
 $A + O = A$ dan $A - O = A$

 Buletin Ilmiah

Contoh matriks sifar:

$$O_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

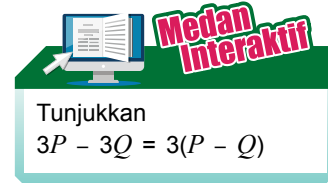
$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 12

Diberi $P = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -3 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, hitung $3(P - Q)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 3(P - Q) &= 3 \left(\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -3 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \quad \text{Buat penolakan dalam kurungan} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ -4 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{Darabkan semua unsur dengan 3} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 36 \\ -12 & 9 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Contoh 13**

- (a) Diberi $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ y \end{bmatrix}$, hitung nilai x dan nilai y .
- (b) Diberi $4R + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$, hitung matriks R .

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 - x \\ 6 - (-3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bandingkan unsur-unsur sepadan.

$$\begin{aligned} 2 - x &= 5, & 6 - (-3) &= y \\ x &= -3, & y &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad 4R + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \\ 4R &= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ 4R &= \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \\ R &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 4R &= A \\ R &= \frac{A}{4} \\ &= \frac{1}{4}A \end{aligned} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Contoh 14

Purata bilangan kenderaan di suatu kawasan parkir untuk setiap hari bagi 5 hari bekerja diwakili dengan Jadual X. Jadual Y pula mewakili purata bilangan kenderaan pada hujung minggu.

	Kereta	Motosikal
Berbumbung	42	8
Tidak berbumbung	20	11

Jadual X

	Kereta	Motosikal
Berbumbung	25	5
Tidak berbumbung	12	3

Jadual Y

Hitung bilangan kenderaan yang parkir di kawasan tersebut dalam seminggu.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 5X + 2Y &= 5 \begin{bmatrix} 42 & 8 \\ 20 & 11 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} \quad \leftarrow 5 \text{ hari bekerja} + 2 \text{ hari pada hujung minggu} \\
 &= \begin{bmatrix} 210 & 40 \\ 100 & 55 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & 10 \\ 24 & 6 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 260 & 50 \\ 124 & 61 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Latih Kendiri 2.2b

1. Tentukan hasil darab bagi setiap matriks berikut.

(a) $3 \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $0.6[11 \quad 5]$

(c) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 12 & -20 \\ -6 & 16 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $-2 \begin{bmatrix} 0.4 & 8 \\ -9 & 2.5 \end{bmatrix}$

(e) $1.2 \begin{bmatrix} 10 & -1 & 11 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

(f) $-\frac{1}{20} \begin{bmatrix} 100 \\ -90 \\ -20 \end{bmatrix}$

2. Selesaikan setiap operasi yang berikut.

(a) $5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 9 & -4 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$

(b) $6 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} - 0.5 \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

(c) $7[3 \quad -2 \quad 1] - \frac{1}{3}[21 \quad 6 \quad -9]$

(d) $0.2 \begin{bmatrix} 10 & -25 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ -5 & 2.5 \end{bmatrix}$

3. Diberi matriks $E = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$, matriks $F = \begin{bmatrix} -7 & 22 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan matriks $G = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$, tunjukkan $(E + F) + G = E + (F + G)$.

4. Diberi matriks $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ -0.7 \end{bmatrix}$, matriks $Q = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ dan matriks $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, hitung $P - 1.4Q + O$.

5. Diberi $4 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ c & 0.1 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} a & 5 \\ -35 & 1.5 \end{bmatrix}$, hitung nilai a , nilai b dan nilai c .

6. Diberi $[-10 \quad 9] - 2X + 5[2 \quad 1] = [3 \quad 8]$, hitung matriks X .

7. Kedai kasut Encik Jamal menjual kasut dewasa dan kasut kanak-kanak. Jadual 1 menunjukkan stok setiap jenis kasut pada awal minggu tertentu manakala Jadual 2 menunjukkan jualan setiap jenis kasut pada minggu tersebut.

	Perempuan	Lelaki
Dewasa	85	70
Kanak-kanak	110	98

Jadual 1

	Perempuan	Lelaki
Dewasa	33	24
Kanak-kanak	42	40

Jadual 2

Hitung inventori akhir setiap jenis kasut pada hujung minggu tersebut. Tunjukkan pengiraan anda dalam bentuk matriks.

Bagaimanakah mendarab dua matriks?

Berdasarkan situasi sebelum ini, jualan kipas angin pada bulan Mac boleh diwakili dengan matriks seperti berikut:

$$P = \begin{bmatrix} & \text{Berdiri} & \text{Siling} & \text{Dinding} \\ & 16 & 18 & 11 \\ & 5 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Di kedai} \\ \text{Dalam talian} \end{matrix}$$

Standard Pembelajaran

Mendarab dua matriks.

Katakan komisen untuk jualan setiap unit kipas berdiri, siling dan dinding ialah RM25, RM30 dan RM20. Bagaimanakah anda menghitung jumlah komisen yang diperoleh daripada jualan di kedai dan dalam talian?

Jumlah komisen yang diperoleh daripada jualan di kedai
 $= (16 \times \text{RM}25) + (18 \times \text{RM}30) + (11 \times \text{RM}20)$
 $= \text{RM}1\ 160$

Jumlah komisen yang diperoleh daripada jualan dalam talian
 $= (5 \times \text{RM}25) + (10 \times \text{RM}30) + (4 \times \text{RM}20)$
 $= \text{RM}505$

Jumlah komisen yang diperoleh boleh dikira dalam bentuk matriks. Jika komisen jualan setiap unit kipas diwakili dalam bentuk matriks lajur, iaitu $K = \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}$, maka jumlah komisen yang diperoleh daripada jualan di kedai dan dalam talian boleh ditulis dalam bentuk matriks seperti yang berikut.

$$\begin{aligned} PK &= \begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} 16(25) + 18(30) + 11(20) \\ 5(25) + 10(30) + 4(20) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1160 \\ 505 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \end{aligned}$$

Minda Kritis

Andaikan K sebagai matriks baris. Lakukan pendaraban matriks PK . Adakah pendaraban boleh dilakukan?

PK dikenali sebagai pendaraban matriks P dengan matriks K dan $\begin{bmatrix} 1160 \\ 505 \end{bmatrix}$ ialah hasil darab dua matriks itu.

Secara umumnya, untuk mendarab dua matriks, A dan B , bilangan lajur matriks A mesti sama dengan bilangan baris matriks B . Bilangan baris matriks A dan bilangan lajur matriks B menjadi peringkat bagi hasil darab dua matriks itu, AB .

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ m \times n & & n \times p \\ \text{Peringkat:} & \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{Bilangan lajur } A = \text{Bilangan baris } B \\ \downarrow \\ \text{Peringkat } AB \text{ ialah } m \times p \end{array} & = AB \\ & & m \times p \end{array}$$

Jika matriks A mempunyai peringkat $m \times n$ dan matriks B mempunyai peringkat $n \times p$, maka pendaraban AB boleh dilakukan dan peringkat AB ialah $m \times p$.

Contoh 15

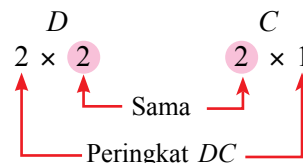
Diberi matriks $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan matriks $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Tentukan sama ada pendaraban CD dan DC boleh dilakukan atau tidak. Jika boleh, nyatakan peringkat hasil darab matriks itu.

Penyelesaian:

Peringkat matriks $C = 2 \times 1$, peringkat matriks $D = 2 \times 2$.



Pendaraban CD tidak boleh dilakukan kerana bilangan lajur matriks C tidak sama dengan bilangan baris matriks D .



Pendaraban DC boleh dilakukan kerana bilangan lajur matriks D sama dengan bilangan baris matriks C .
Peringkat DC ialah 2×1 .

Contoh 16

Diberi matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Hitung AB .

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(6) + (3)(-2) & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & \\ & \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Unsur pada baris 1 dan lajur 1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & (2)(-7) + (3)(1) \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ & \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Unsur pada baris 1 dan lajur 2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ (1)(6) + (5)(-2) & \boxed{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -4 & \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Unsur pada baris 2 dan lajur 1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -4 & (1)(-7) + (5)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Unsur pada baris 2 dan lajur 2}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka, } AB &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2)(6) + (3)(-2) & (2)(-7) + (3)(1) \\ (1)(6) + (5)(-2) & (1)(-7) + (5)(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

TiP Bestari

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} \times b_{11}) + (a_{12} \times b_{21}) \\ (a_{21} \times b_{11}) + (a_{22} \times b_{21}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} + d_{11} \\ e_{21} + f_{21} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \end{aligned}$$

Contoh 17

Diberi matriks $E = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$, matriks $F = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ dan matriks $G = [4 \ 3]$. Hitung

- (a) GE (b) FG (c) GF

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{(a) } GE &= [4 \ 3]_{1 \times 2} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \\ &= [4(5) + 3(-4) \quad 4(-1) + 3(8) \quad 4(0) + 3(7)] \\ &= [8 \ 20 \ 21]_{1 \times 3} \end{aligned}$$

Hasil darab matriks ialah matriks berperingkat 1×3

$$\begin{aligned} \text{(b) } FG &= \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}_{2 \times 1} [4 \ 3]_{1 \times 2} \\ &= \begin{bmatrix} (-2)(4) & (-2)(3) \\ 7(4) & 7(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 28 & 21 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

Hasil darab matriks ialah matriks berperingkat 2×2

$$\begin{aligned} \text{(c) } GF &= [4 \ 3]_{1 \times 2} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\ &= [4(-2) + 3(7)] \\ &= [13]_{1 \times 1} \end{aligned}$$

Hasil darab matriks ialah matriks berperingkat 1×1

Contoh 18

Diberi matriks $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ dan matriks $L = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hitung

- (a) L^2 (b) KL^2 (c) L^3

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{(a) } L^2 &= LL \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 + 0 & -8 + 2 \\ 0 + 0 & 0 + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

TIP Bestari

Sentiasa semak peringkat matriks yang terhasil sebelum pendaraban. Misalnya, matriks peringkat $m \times n$ darab matriks peringkat $n \times p$ menghasilkan matriks peringkat $m \times p$.

Minda Kritis

Mengapakah $FG \neq GF$?

i-Teknologi

Kalkulator saintifik boleh digunakan untuk membuat pendaraban dua matriks. Imbas kod QR atau layari bit.do/Video203 untuk melihat video yang berkaitan.

**Buletin Ilmiah**

$$\text{Diberi } L = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L^2 \neq \begin{bmatrix} (-4)^2 & 2^2 \\ 0^2 & 1^2 \end{bmatrix}.$$

$$L^2 = LL,$$

$$L^3 = L^2L = LL^2.$$

(b) KL^2

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 48 + 0 & -18 + 2 \\ -16 + 0 & 6 + 5 \\ 64 + 0 & -24 + (-2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 48 & -16 \\ -16 & 11 \\ 64 & -26 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(c) L^3

$$\begin{aligned}
 &= L^2L \\
 &= \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -64 + 0 & 32 + (-6) \\ 0 + 0 & 0 + 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -64 & 26 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Cuba hitung LL^2 .

Imbas kod QR atau layari
bit.do/KalkulatorMatriks
 untuk menggunakan
 kalkulator matriks.

**Contoh 19**

Diberi $\begin{bmatrix} 6x & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 - y \end{bmatrix}$, hitung nilai x dan nilai y .

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 6x & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 - y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 6x & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} &= [(6x)(2) + (-5)(1) \quad (6x)(3) + (-5)(4)]_{1 \times 2} \\
 &= [12x - 5 \quad 18x - 20]
 \end{aligned}$$

Maka, $[12x - 5 \quad 18x - 20] = [7 \quad 1 - y]$.

Bandingkan unsur-unsur sepadan.

$$\begin{aligned}
 12x - 5 &= 7 & \text{dan} & & 18x - 20 &= 1 - y \\
 12x &= 12 & & & 18(1) - 20 &= 1 - y \\
 x &= 1 & & & -2 &= 1 - y \\
 & & & & y &= 3
 \end{aligned}$$

Contoh 20

Jadual di bawah menunjukkan unit saham yang dibeli oleh Khairil dan Mahmud.

	Saham A (unit)	Saham B (unit)
Khairil	5 000	4 000
Mahmud	2 000	6 000

Diberi harga seunit saham A dan seunit saham B semasa pembelian ialah RM1.50 dan RM0.82. Hitung jumlah pelaburan Khairil dan jumlah pelaburan Mahmud.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 5000 & 4000 \\ 2000 & 6000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.50 \\ 0.82 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7500 + 3280 \\ 3000 + 4920 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 10780 \\ 7920 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Jumlah pelaburan Khairil dan Mahmud masing-masing ialah RM10 780 dan RM7 920.

Diberi matriks $P = \begin{bmatrix} a & b + 1 \end{bmatrix}$

dan $Q = \begin{bmatrix} c - 1 & 2 \\ -3 & 4d \end{bmatrix}$.

Hitung

- (i) PQ
 (ii) Q^2

Latih Kendiri 2.2c

1. Diberi empat matriks $P = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$, $R = [4 \ 8 \ 5]$ dan $S = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 3 & 11 & -2 \end{bmatrix}$.

Tentukan sama ada pendaraban matriks berikut boleh dilakukan atau tidak. Jika ya, nyatakan peringkat hasil darab pasangan matriks itu.

- (a) PQ (b) QR (c) RS
(d) SP (e) PS (f) QP

2. Diberi empat matriks, $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $W = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.
Hitung

- (a) TU (b) UW (c) UV
(d) WV (e) W^2 (f) W^3

3. Diberi $\begin{bmatrix} -1 & x \\ y & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 29 \end{bmatrix}$, hitung nilai x dan nilai y .

4. Diberi $\begin{bmatrix} 9 & r \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & s \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 14.5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$, hitung nilai r dan nilai s .

5. Diberi $G = \begin{bmatrix} p & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ dan $H = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, hitung nilai p , nilai q dan nilai r jika

(a) $GH = \begin{bmatrix} 3 & 2q \\ -18 & 3p + r \end{bmatrix}$ (b) $G^2 = \begin{bmatrix} r & -25 \\ -5 & 7q \end{bmatrix}$

(c) $HG = \begin{bmatrix} -11 & 2.5q \\ \frac{p+3r}{2} & 5p \end{bmatrix}$ (d) $H^2 = \begin{bmatrix} 57 & 6p \\ 1.2q & \frac{7r}{5} \end{bmatrix}$

6. Encik Koh menyewa sebuah gerai di Expo Pendidikan untuk menjual tiga jenis barangan yang ditunjukkan dalam jadual di bawah.

	Barangan A	Barangan B	Barangan C
Hari pertama	40	28	36
Hari kedua	42	36	30
Hari ketiga	35	25	42

Diberi keuntungan jualan setiap barangan A, B dan C masing-masing ialah RM5, RM8 dan RM6. Hitung jumlah keuntungan yang diterima oleh Encik Koh setiap hari. Tunjukkan pengiraan anda dalam bentuk matriks.

[Diberi bahawa jumlah keuntungan = jualan barangan A $\times$ keuntungan barangan A
+ jualan barangan B $\times$ keuntungan barangan B
+ jualan barangan C $\times$ keuntungan barangan C]

Apakah ciri-ciri matriks identiti?

$$a \times 1 = a$$

$$1 \times a = a$$

Standard Pembelajaran

Menerangkan ciri-ciri matriks identiti.

Apabila 1 didarabkan dengan sebarang nombor, a , hasilnya ialah a . Apabila suatu matriks didarabkan dengan matriks A , hasilnya ialah matriks A . Matriks tersebut merupakan matriks identiti. Apakah ciri-ciri matriks identiti?

MOBILISASI MINDA 2

Berkumpulan

Tujuan: Menentukan matriks identiti.

Langkah:

1. Bahagikan kelas kepada kumpulan 4 orang murid.
2. Salin **Lembaran Aktiviti** di bawah dan lengkapkan secara bergilir-gilir.

Lembaran Aktiviti:

	Matriks A	Matriks B	AB	BA
(a)	$\begin{bmatrix} 5 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$		
(b)	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$		
(c)	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
(d)	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$		
(e)	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		
(f)	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$		
(g)	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		

Perbincangan:

1. Matriks B yang manakah apabila didarabkan dengan matriks A akan menghasilkan matriks A juga?
2. Apakah unsur-unsur yang terdapat dalam matriks B tersebut? Bagaimanakah kedudukan unsur-unsur itu?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 2, didapati bahawa;

- (a) Matriks B dalam bentuk $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ apabila didarabkan dengan matriks A akan menghasilkan matriks A , iaitu $AB = BA = A$.
- (b) Unsur-unsur dalam matriks B ini terdiri daripada 0 dan 1 sahaja dengan unsur 1 terletak di sepanjang pepenjuruan dari sudut kiri di sebelah atas ke sudut kanan di sebelah bawah dan unsur yang lain adalah sifar.

Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dikenali sebagai matriks

identiti dan diwakili oleh I .

Matriks identiti ialah matriks segi empat sama.

Matriks identiti, I , didarabkan dengan suatu matriks A , akan menghasilkan matriks A .

$$AI = IA = A$$

Contoh 21

Tuliskan matriks identiti berdasarkan peringkat berikut.

- (a) 1×1 (b) 2×2
(c) 4×4 (d) 5×5

Penyelesaian:

- (a) $[1]$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Latih Kendiri 2.2d

1. Antara matriks berikut, yang manakah matriks identiti? Jika bukan, berikan sebab anda.

- (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tip Bestari

Matriks identiti, I , berperingkat $n \times n$:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Buletin Ilmiah

Susun unsur 1 di sepanjang pepenjuruan dari sudut kiri di sebelah atas ke sudut kanan di sebelah bawah dan unsur lain adalah sifar. Pepenjuruan ini dinamakan pepenjuruan utama. Matriks ini dinamakan matriks pepenjuruan.

Minda Kritis

Matriks identiti ialah matriks pepenjuruan. Adakah matriks pepenjuruan ialah matriks identiti? Bincangkan.

2. Diberi matriks $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan matriks $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tunjukkan matriks D ialah matriks identiti.
3. Diberi matriks $S = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ dan matriks $T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$. Hitung
- (a) $SI + TI$ (b) $(IS)T$
 (c) $4IT - I^2$ (d) $(S - I)I$

Apakah maksud matriks songsang?

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AB \qquad \qquad \qquad BA \qquad \qquad \qquad I$

Standard Pembelajaran

Menerangkan maksud matriks songsang dan seterusnya menentukan matriks songsang bagi suatu matriks 2×2 .

Jika pendaraban matriks A dan matriks B menghasilkan matriks identiti, I , maka matriks B adalah songsangan matriks A dan sebaliknya.

MOBILISASI MINDA 3 Berkumpulan

Tujuan: Menentukan matriks songsang.

Langkah:

1. Bahagikan kelas kepada kumpulan 4 orang murid.
2. Setiap murid memilih sekeping kad matriks A dan sekeping kad matriks B seperti yang ditunjukkan di bawah.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Murid membuat pendaraban matriks AB dan BA . Hasil darab dicatatkan dalam jadual seperti di sebelah.
4. Murid menukar kad matriks B dengan rakan lain dalam kumpulan. Langkah 3 diulangi.
5. Murid membincangkan hasil dapatan mereka dalam kumpulan.

Matriks A	Matriks B	AB	BA

Perbincangan:

1. Hasil darab dua matriks yang manakah ialah matriks identiti?
2. Apakah kesimpulan tentang hubungan antara dua matriks tersebut?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 3, didapati bahawa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pasangan matriks di atas ialah matriks songsang antara satu sama lain.

Buletin Ilmiah

A^{-1} dibaca sebagai matriks songsang A .

$$A^{-1} \neq \frac{1}{A}$$

Pendaraban matriks A dan **matriks songsang** A , A^{-1} , akan menghasilkan matriks identiti, I .
 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Contoh 22

Tentukan sama ada matriks berikut ialah matriks songsang bagi $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$. Jelaskan jawapan anda.

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}$ ← Hasil darab bukan matriks identiti

$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ bukan matriks songsang bagi $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ kerana hasil darab dua matriks ini bukan matriks identiti.

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ← Hasil darab ialah matriks identiti

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ← Hasil darab ialah matriks identiti

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ ialah matriks songsang bagi $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ kerana hasil darab dua matriks ini ialah matriks identiti.

Buletin Ilmiah

Matriks songsang hanya wujud dalam bentuk matriks segi empat sama kerana kedua-dua AA^{-1} dan $A^{-1}A$ sama dengan I . Namun, bukan semua matriks segi empat sama mempunyai matriks songsang.

Latih Kendiri 2.2e

1. Tentukan sama ada matriks berikut ialah matriks songsang antara satu sama lain.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

Bagaimanakah menentukan matriks songsang bagi suatu matriks 2×2 ?

MOBILISASI MINDA 4

Berkumpulan

Tujuan: Menerbit rumus untuk menentukan matriks songsang bagi matriks 2×2 .

Langkah:

1. Bahagikan kelas kepada kumpulan 4 orang murid.
2. Salin dan lengkapkan **Lembaran Aktiviti** berikut mengikut arahan yang diberikan.

Lembaran Aktiviti:

Diberi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$.	
Arahan	Jalan Kerja
Darabkan matriks A dan A^{-1}	$AA^{-1} = \begin{bmatrix} ap + br & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$
Bentukkan 4 persamaan daripada $AA^{-1} = I$	$\begin{bmatrix} ap + br & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (i) $ap + br = 1$ (ii) $\boxed{}$ (iii) $\boxed{}$ (iv) $\boxed{}$
Dengan kaedah penggantian, ungkapkan p, q, r dan s dalam sebutan a, b, c dan d	Guna persamaan (i) dan (iii), ungkapkan p dan r dalam sebutan a, b, c dan d
	$p = \frac{d}{ad - bc}$ $r = \boxed{}$
Tuliskan matriks A^{-1} dalam sebutan a, b, c dan d	Guna persamaan (ii) dan (iv), ungkapkan q dan s dalam sebutan a, b, c dan d
	$q = \boxed{}$ $s = \boxed{}$
Tuliskan matriks A^{-1} dalam sebutan a, b, c dan d	$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$
Tuliskan A^{-1} sebagai pendaraban skalar	$A^{-1} = \frac{1}{\boxed{}} \begin{bmatrix} d & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$

3. Tuliskan semua jalan kerja pada kertas sebak dan tampal pada dinding. Murid memberikan komen tentang hasil kerja kumpulan lain dengan menampal nota lekit pada hasil kerja kumpulan itu.

Perbincangan:

Apakah rumus untuk menentukan matriks songsang?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 4, didapati bahawa

- (a) skalar yang dihasilkan ialah $\frac{1}{ad - bc}$.
- (b) kedudukan unsur a_{11} ialah d , unsur a_{12} ialah $-b$, unsur a_{21} ialah $-c$ dan unsur a_{22} ialah a . Perhatikan kedudukan a dan d saling bertukar kedudukan manakala b dan c didarabkan dengan -1 .

Diberi matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, matriks songsang, A^{-1} boleh diperoleh dengan rumus berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ dengan keadaan } ad - bc \neq 0$$

Penentu matriks A , $|A|$ ialah $ad - bc$ dengan keadaan $ad - bc \neq 0$. Oleh itu, matriks songsang, A^{-1} wujud. Matriks songsang tidak wujud apabila $ad - bc = 0$.

Contoh 23

Bagi setiap matriks yang berikut, tentukan sama ada matriks songsang wujud. Jika wujud, hitung matriks songsang.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

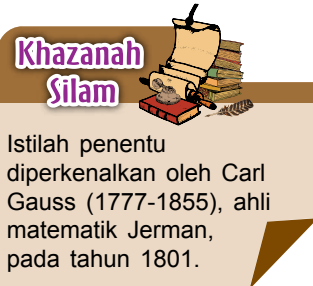
(a) $ad - bc = 1(8) - 2(4)$
 $= 8 - 8$
 $= 0$

$|A| = 0$. Maka, A^{-1} tidak wujud.

(b) $ad - bc = 3(4) - 5(2)$
 $= 12 - 10$
 $= 2$
 $\neq 0$

$|B| \neq 0$. Maka, B^{-1} wujud.

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{1}{3(4) - 5(2)} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Tentukan kewujudan matriks songsang dengan penentu matriks, $ad - bc$

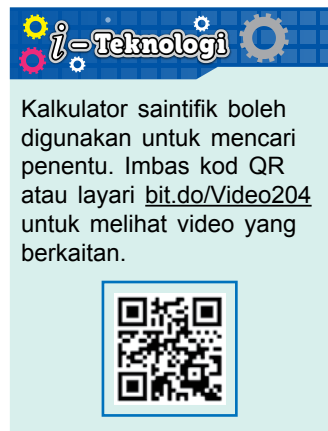
Saling tukar kedudukan unsur dalam pepenjuru utama dan darabkan kedua-dua unsur lain dengan -1

Contoh 24

Diberi matriks $C = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, hitung matriks songsang bagi C .

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \frac{1}{2(-2) - (-6)(1)} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Contoh 25

Diberi matriks $D = \begin{bmatrix} m & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, hitung nilai m jika

(a) matriks D tidak mempunyai matriks songsang,

(b) $D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

(a) Matriks D tidak mempunyai matriks songsang, maka

$$ad - bc = 0$$

$$-2m - (-6)(1) = 0$$

$$-2m + 6 = 0$$

$$m = 3$$

(b) $DD^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} m & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m(-1) + (-6)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$-m + 3 = 1$$

$$m = 2$$

Contoh 26

Diberi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks A berperingkat 2×2 . Hitung matriks A .

Penyelesaian:

Diberi hasil darab $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ dengan A ialah matriks identiti, maka A ialah matriks songsang bagi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.

$$A = \frac{1}{(1)(8) - (2)(3)} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Minda Kritis

Apakah matriks songsang bagi matriks identiti?

Minda Kritis

Kenapa $ad - bc = 0$ menyebabkan A^{-1} tidak wujud?

Semak Jawapan

$$D^{-1} = \frac{1}{-2m - (-6)(1)} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2m + 6} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & m \end{bmatrix}$$

Unsur sepadan pada baris 1 lajur 1:

$$-1 = \frac{-2}{-2m + 6}$$

$$2m - 6 = -2$$

$$m = 2$$

Latih Kendiri 2.2f

1. Bagi setiap matriks yang berikut, tentukan sama ada matriks songsang wujud. Jika wujud, hitung matriks songsang.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Hitung matriks songsang bagi matriks yang berikut.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

3. Diberi matriks $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & p \end{bmatrix}$. Hitung nilai p jika

- (a) matriks G tidak mempunyai matriks songsang,

(b) $G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

4. Diberi $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks P berperingkat 2×2 . Hitung matriks P .

Bagaimanakah menggunakan kaedah matriks untuk menyelesaikan persamaan linear serentak?

Persamaan linear serentak boleh diselesaikan dengan menggunakan kaedah matriks mengikut langkah-langkah berikut.

Standard Pembelajaran

Menggunakan kaedah matriks untuk menyelesaikan persamaan linear serentak.

Persamaan linear serentak

$$\begin{aligned} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{aligned}$$

Bentuk matriks $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

dengan keadaan a, b, c, d, p dan q ialah pemalar manakala x dan y ialah pemboleh ubah

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Contoh 27

Tuliskan persamaan linear serentak di bawah dalam bentuk matriks.

$$3x + 4y = 12$$

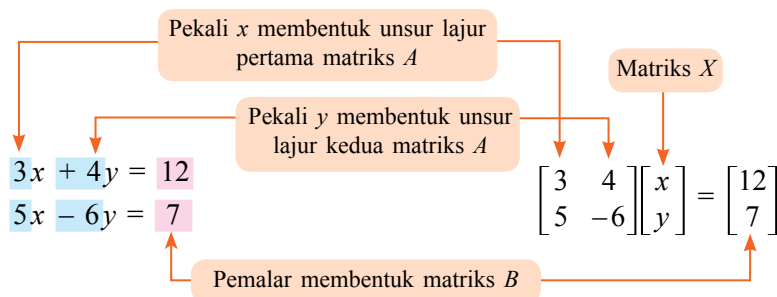
$$5x - 6y = 7$$

Minda Kritis

Adakah pendaraban ini boleh dilakukan?

$$AA^{-1}X = BA^{-1}$$

Penyelesaian:



Persamaan linear serentak tersebut dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Contoh 28

Selesaikan persamaan linear serentak di bawah dengan menggunakan kaedah matriks.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x - 4y &= 4 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Tulis persamaan linear serentak dalam bentuk matriks}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{(1)(-4) - (-2)(3)} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Maka, $x = 2$ dan $y = \frac{1}{2}$ $\leftarrow$ Jawapan akhir

Minda Kritis

Jika persamaan dalam Contoh 27,

$$5x - 6y = 7$$

$$3x + 4y = 12$$

ditulis dalam bentuk matriks, adakah susunan persamaan itu mempengaruhi jawapan?

Tip Bestari

Penyelesaian persamaan linear serentak bermaksud mencari nilai x dan nilai y . Jadi, jawapan akhir menyatakan nilai-nilai itu.

Semak Jawapan

Darabkan $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1 \\ 6 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Latih Kendiri 2.2g

- Tuliskan persamaan linear serentak di bawah dalam bentuk matriks.
 - $x - y = 7$, $x + 3y = 5$
 - $3x + y = 0$, $5x + 2y = -14$
 - $7x + 2y = -11$, $2x - y = -10$
 - $3x + 2y - 14 = 0$, $4y = 5x - 5$
 - $2x + y + 4 = 0$, $y - 3x = 11$
 - $2x + y = -9$, $5x = -12$
 - $2x = 5y$, $\frac{x}{5} + 2y = 3$
 - $\frac{x}{y} = 4$, $0.8(x + 5) = 3y$
- Dalam suatu pertandingan catur, jumlah peserta ialah 100 orang. Bilangan peserta lelaki, x , ialah 14 orang kurang daripada 2 kali bilangan peserta perempuan, y . Tuliskan persamaan linear serentak yang mewakili maklumat di atas dalam bentuk matriks.

3. Selesaikan persamaan linear serentak di bawah dengan menggunakan kaedah matriks.

(a) $x - 2y = 5$, $2x - 3y = 10$

(b) $2x - 5y = 1$, $3x - y = -5$

(c) $2x - y = 8$, $x + y = 1$

(d) $3x + 2y = 4$, $9x + 4y = 14$

(e) $4x + 3y = 11$, $2y = 9 - 6x$

(f) $5x - 5y - 6 = 0$, $2x - 2.1 = 3y$

(g) $p + 3q = 4$, $3 + \frac{p}{2} = q$

(h) $m + n = 5$, $\frac{m}{2} - \frac{n}{4} = 1$



Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan matriks?

Standard Pembelajaran

Meyeleikan masalah yang melibatkan matriks.

Tulis persamaan linear dalam bentuk $ax + by = p$, $cx + dy = q$ dengan keadaan a, b, c, d, p dan q ialah pemalar manakala x dan y ialah pemboleh ubah



Tulis persamaan linear serentak dalam bentuk matriks $AX = B$



Selesaikan dengan pendaraban matriks songsang:
 $X = A^{-1}B$

Contoh 29

Saya membeli 2 keping tiket kanak-kanak dan sekeping tiket dewasa dengan bayaran RM32.



Saya membeli 5 keping tiket kanak-kanak dan 3 keping tiket dewasa dengan bayaran RM88.

Berdasarkan perbualan di atas, berapakah harga sekeping tiket kanak-kanak dan dewasa?

Penyelesaian:

Memahami masalah

Harga 2 keping tiket kanak-kanak dan 1 keping tiket dewasa ialah RM32.

Harga 5 keping tiket kanak-kanak dan 3 keping tiket dewasa ialah RM88.

x = harga sekeping tiket kanak-kanak

y = harga sekeping tiket dewasa

Merancang strategi

- Bentukkan dua persamaan linear.
- Ungkapkan persamaan dalam bentuk matriks dan selesaikannya.

Melaksanakan strategi

$$2x + y = 32$$

$$5x + 3y = 88$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 88 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(2)(3) - (1)(5)} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 88 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6 - 5} \begin{bmatrix} 96 - 88 \\ -160 + 176 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Membuat kesimpulan

Harga sekeping tiket kanak-kanak ialah RM8 dan sekeping tiket dewasa ialah RM16.

Contoh 30

	Kamera K	Kamera L
Pemasangan	10 minit	10 minit
Pembungkusan	5 minit	9 minit

Syarikat Komunikasi Era Baru menghasilkan dua model kamera, K dan L. Setiap kamera yang dihasilkan perlu melalui dua bahagian, iaitu Bahagian Pemasangan dan Bahagian Pembungkusan. Jadual di atas menunjukkan masa pemasangan dan pembungkusan bagi setiap jenis kamera. Diberi bahawa Bahagian Pemasangan beroperasi selama 12 jam sehari dan Bahagian Pembungkusan pula beroperasi selama 9 jam sehari. Hitung bilangan kamera K dan kamera L yang boleh dihasilkan dalam sehari.

Penyelesaian:

Memahami masalah

Jumlah masa pemasangan ialah 12 jam bersamaan 720 minit.
Jumlah masa pembungkusan ialah 9 jam bersamaan 540 minit.

x = bilangan kamera K yang dihasilkan
 y = bilangan kamera L yang dihasilkan

Membuat kesimpulan

Bilangan kamera K yang dihasilkan ialah 27 unit dan bilangan kamera L yang dihasilkan ialah 45 unit.

Merancang strategi

- Bentukkan dua persamaan linear.
- Ungkapkan persamaan dalam bentuk matriks dan selesaikannya.

Melaksanakan strategi

$$10x + 10y = 720$$

$$5x + 9y = 540$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 540 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(10)(9) - (10)(5)} \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 720 \\ 540 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 1080 \\ 1800 \end{bmatrix}$$

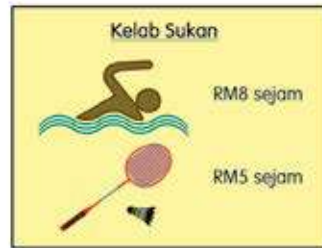
$$= \begin{bmatrix} 27 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Latih Kendiri 2.2h

- Suatu kaji selidik telah dijalankan mengenai jualan dua jenis karipap, berinti sardin dan berinti kentang. Dalam satu jam pertama, 24 biji karipap berinti sardin dan 18 biji karipap berinti kentang telah dijual, dan jumlah jualan ialah RM28.80. Dalam satu jam seterusnya, 30 biji karipap berinti sardin dan 14 biji karipap berinti kentang telah dijual, dan jumlah jualan ialah RM29.20. Hitung harga satu biji karipap berinti sardin dan satu biji karipap berinti kentang dengan menggunakan kaedah matriks.

2. Akmal menghabiskan RM68 seminggu untuk menjalani kedua-dua sukan yang dinyatakan di bawah. Hitung tempoh, dalam jam, Akmal berenang dan bermain badminton di Kelab Sukan dalam seminggu dengan menggunakan kaedah matriks.

Saya menggunakan 10 jam seminggu untuk berenang dan bermain badminton di Kelab Sukan.



3. Puan Komala dan Puan Lily pergi ke pasar untuk membeli betik dan pisang. Jadual di bawah menunjukkan berat betik dan pisang yang dibeli oleh mereka.

	Betik	Pisang
Puan Komala	4 kg	2 kg
Puan Lily	5 kg	3 kg

Puan Komala dan Puan Lily membayar RM26 dan RM35 untuk pembelian dua jenis buah ini. Hitung harga bagi sekilogram betik dan sekilogram pisang dengan menggunakan kaedah matriks.

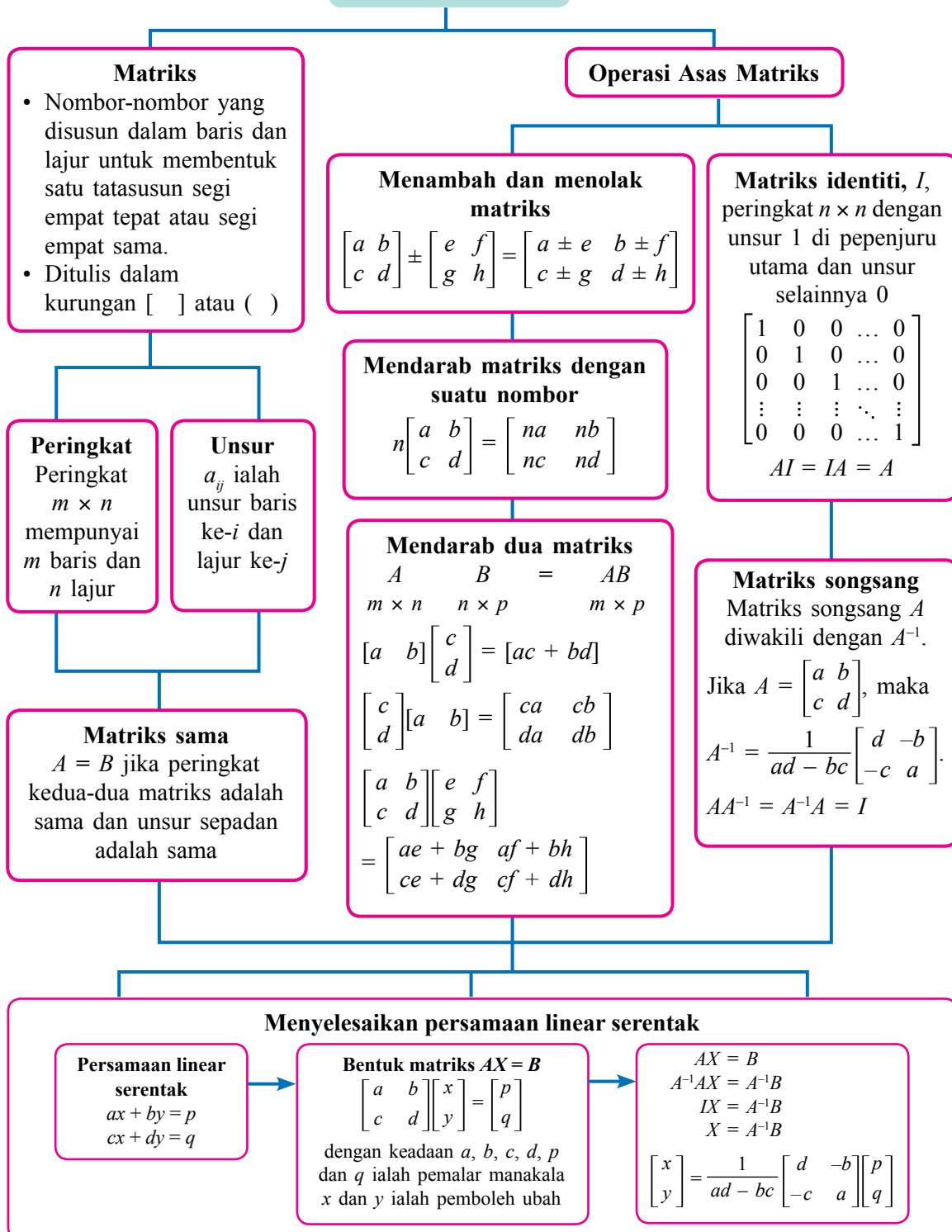
4. Sebuah bangunan mempunyai beberapa tempat parkir untuk kereta dan motosikal. Pada suatu hari, terdapat sejumlah 66 buah kenderaan parkir di sana dan jumlah bilangan roda ialah 190. Hitung bilangan kereta dan bilangan motosikal yang parkir pada hari itu dengan menggunakan kaedah matriks. Andaikan semua motosikal beroda dua.
5. Encik Jefri dan Encik Tan masing-masing melabur di Amanah Saham P dan Amanah Saham Q seperti ditunjukkan dalam jadual di bawah.

	Amanah Saham P	Amanah Saham Q
Encik Jefri	RM5 000	RM3 000
Encik Tan	RM6 000	RM4 000

Selepas setahun, Encik Jefri memperoleh dividen sebanyak RM350 daripada pelaburan kedua-dua amanah saham ini manakala Encik Tan memperoleh dividen sebanyak RM440. Hitung kadar dividen yang diberikan oleh Amanah Saham P dan Amanah Saham Q dengan menggunakan kaedah matriks.

Arena Rumusan

MATRIKS



Refleksi



Pada akhir bab ini, saya dapat

- | | | |
|--|--|--|
| mewakili maklumat situasi sebenar dalam bentuk matriks. | | |
| menentukan peringkat matriks dan seterusnya mengenal pasti unsur tertentu dalam suatu matriks. | | |
| menentukan sama ada dua matriks adalah sama. | | |
| menambah dan menolak matriks. | | |
| mendarab matriks dengan suatu nombor. | | |
| mendarab dua matriks. | | |
| menerangkan ciri-ciri matriks identiti. | | |
| menerangkan maksud matriks songsang dan seterusnya menentukan matriks songsang bagi suatu matriks 2×2 . | | |
| menggunakan kaedah matriks untuk menyelesaikan persamaan linear serentak. | | |
| menyelesaikan masalah yang melibatkan matriks. | | |

PROJEK MINI

Syarikat pengangkutan menggunakan rangkaian untuk mewakili laluan pengangkutan mereka. Rangkaian mempunyai bucu yang disambungkan dengan tepi.

Dalam rajah di bawah, bucu P , Q , R , S dan T mewakili bandar manakala tepi mewakili laluan bas di antara dua buah bandar. Semua laluan ini merupakan jalan yang menghubungkan bandar bersebelahan. Sistem laluan ini boleh diwakili dengan matriks seperti di bawah.



Dari

	Ke
	$P \quad Q \quad R \quad S \quad T$
P	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Q	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
R	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
S	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
T	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Sediakan satu laporan tentang sistem laluan bas (atau pengangkutan yang lain) di kawasan anda. Laporan anda perlu mengandungi

- pengenal sistem pengangkutan awam di kawasan anda,
- penggunaan matriks dalam perwakilan sistem laluan pengangkutan awam,
- maksud unsur dalam matriks.

Latih Ekstensif

Imbas kod QR atau layari
bit.do/Kuiz02 untuk kuiz interaktif



FAHAM

1. Nyatakan bilangan baris dan lajur bagi matriks $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.
2. Diberi $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan $AB = C$. Tentukan peringkat matriks C .
3. Diberi matriks $D = \begin{bmatrix} 4 & p \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Hitung nilai p jika penentu matriks D ialah 0.
4. Diberi matriks $E = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, tunjukkan $E + E + E = 3E$.
5. Tuliskan persamaan linear serentak berikut dalam bentuk matriks.

$$\begin{aligned} m - 3 &= 4n \\ 3m + 2n - 2 &= 0 \end{aligned}$$

MASTERI

6. Diberi $G = \begin{bmatrix} 4 & r \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $H = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & s \end{bmatrix}$. Hitung nilai r dan nilai s jika $GH = HG$.
7. Diberi $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $AB = I$. Hitung matriks B .
8. Diberi $P = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2z - 3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0.2 & -\frac{1}{3} \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 11 & -25 \\ y + 6x & -0.2 \\ 24 & 9 \end{bmatrix}$ dan $0.8P + 3Q = R$,
hitung nilai x , nilai y dan nilai z .
9. Diberi matriks $F = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.
 - (a) Hitung F^3 .
 - (b) Seterusnya, hitung matriks G jika $F^3 - 5G = 12F$.
10. Diberi $\frac{1}{p} \begin{bmatrix} 2 & q \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, hitung nilai p dan nilai q .
11. (a) Tuliskan persamaan linear serentak di bawah dalam bentuk matriks.
(b) Hitung nilai x dan nilai y dengan menggunakan kaedah matriks.

$$\begin{aligned} 2y - x &= 5 \\ 3x - 8y &= -19 \end{aligned}$$

12. Satu kejohanan maraton mempunyai 128 orang peserta. Bilangan peserta lelaki ialah 16 orang kurang daripada 2 kali bilangan peserta perempuan. Hitung bilangan peserta lelaki dan peserta perempuan maraton itu dengan menggunakan kaedah matriks.

13. Diberi persamaan linear serentak $px + 4y = 10$ dan $qx - 2y = 1$ tiada penyelesaian. Ungkapkan p dalam sebutan q .

14. Faris mengambil satu kursus di sebuah kolej. Dia telah mendaftar tiga subjek bagi semester pertama. Markah keseluruhan setiap subjek dikira berdasarkan markah bahagian latihan dan peperiksaan mengikut peratusan setiap bahagian. Jadual 1 menunjukkan markah yang diperoleh Faris bagi setiap bahagian pada semester pertama. Jadual 2 menunjukkan peratusan bahagian dalam pengiraan markah keseluruhan.

	Latihan	Peperiksaan
Matematik	80	70
Bahasa Inggeris	60	75
Sains Komputer	74	84

Jadual 1

	Semester Pertama
Latihan	60%
Peperiksaan	40%

Jadual 2

- Wakilkan maklumat dalam Jadual 1 dan Jadual 2 dengan matriks.
 - Hitung markah keseluruhan Matematik pada semester pertama dengan menggunakan kaedah matriks.
 - Tentukan subjek yang terbaik pada semester pertama.
15. Syahirah sedang menjalani satu pelan diet yang melibatkan dua jenis minuman iaitu P dan Q. Jadual di bawah menunjukkan kandungan protein dan kalori bagi segelas minuman itu.

	Minuman P	Minuman Q
Protein (g)	6	4
Kalori (kcal)	95	110

Pelan diet itu mencadangkan Syahirah supaya mengambil sejumlah 16 g protein dan 300 kcal setiap hari daripada dua jenis minuman ini.

- Bentuk dua persamaan linear daripada maklumat di atas.
- Hitung bilangan gelas minuman P dan minuman Q yang perlu diminum oleh Syahirah setiap hari mengikut pelan diet ini dengan menggunakan kaedah matriks.

16. Encik Sanjay menjual dua jenama pendingin hawa, K dan L. Harga pendingin hawa jenama K dan L ialah RM1 500 dan RM2 000. Komisen menjual sebuah pendingin hawa jenama K dan L ialah 3% dan 4%. Pada bulan Mei, Encik Sanjay menjual 50 unit pendingin hawa dan mendapat komisen sejumlah RM2 880. Hitung bilangan pendingin hawa jenama K dan L yang dijual dengan menggunakan kaedah matriks.



Kriptografi ialah sains keselamatan informasi. Kriptografi melibatkan teknik seperti menggabungkan perkataan ke dalam bentuk imej atau menulis perkataan dalam kod rahsia supaya perkataan itu tidak dapat dibaca oleh pihak ketiga. Pada masa Perang Dunia Kedua, tentera Jerman menggunakan mesin Enigma untuk menulis mesej rahsia tentera mereka. Tiga orang ahli matematik dari Poland berjaya menyahsulit (*decrypt*) mesej daripada mesin Enigma dan membantu Kuasa Bersekutu menamatkan perang.

Gunakan sistem kod di bawah, hantar mesej "GURU KELAS" kepada rakan anda.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	!	?	.
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Ikuti langkah-langkah berikut.

- (a) Tuliskan mesej tersebut dalam beberapa matriks peringkat 2×1 .

- (b) Gunakan mangga $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ untuk menyulitkan (*encrypt*) mesej, iaitu matriks M didarab dengan setiap matriks yang terbentuk di (a).

- (c) Hasil darab yang diperoleh akan ditukar kepada mesej rahsia dalam huruf berdasarkan sistem kod di atas dan dihantar kepada rakan. Jika hasil darab ialah nombor negatif, tambahkan hasil darab itu dengan 30.

- (d) Apabila menerima mesej rahsia, rakan perlu menyahsulit (*decrypt*) mesej berdasarkan langkah-langkah yang berikut:

- (i) tuliskan mesej rahsia yang diperoleh dalam beberapa matriks peringkat 2×1 .

- (ii) darabkan kunci $K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ dengan setiap matriks yang terbentuk di (d)(i).

- (iii) hasil darab yang diperoleh ditukar kepada mesej yang sebenarnya dengan merujuk sistem kod di atas. Jika hasil darab ialah nombor negatif, tambahkan hasil darab itu dengan 30.

Tip bagi

langkah-langkah:

- (a) Contohnya, mesej "DI BAS", huruf "D" = 4, "I" = 9, " " = 0, "B" = 2, "A" = 1 dan "S" = 19. Maka matriks-matriks yang terbentuk ialah $\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 \\ 19 \end{bmatrix}$.

- (b) Contohnya, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 19 \end{bmatrix}$.

- (c) Contohnya, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.
Jadi, $\begin{bmatrix} -1 + 30 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 4 \end{bmatrix}$.
Dengan merujuk sistem kod, $\begin{bmatrix} 29 \\ 4 \end{bmatrix}$ akan diwakili dengan $\begin{bmatrix} \cdot \\ D \end{bmatrix}$.
Mesej rahsia penuh yang dihasilkan ialah "D? MA".

BAB 3

Matematik Pengguna: Insurans

Apakah yang akan anda pelajari?

- Risiko dan Perlindungan Insurans

Maslahat Bab Ini

Pengetahuan tentang risiko dan insurans sebagai perlindungan kewangan adalah sangat penting bagi setiap individu sebagai persediaan pada masa depan. Pengetahuan ini juga penting dalam pengurusan kewangan peribadi kerana kita mungkin akan menggunakan sebahagian pendapatan kita untuk insurans.

Tahukah Anda?

Di Malaysia, industri insurans telah dikawal selia oleh Bank Negara Malaysia bawah Akta Insurans 1996 yang telah menggantikan Akta Insurans 1963. Akta ini dilengkapi dengan peraturan-peraturan insurans dan menjadi asas perundangan utama yang mengawal urusan perniagaan insurans di Malaysia. Selain itu, akta ini telah memberi kuasa kepada Bank Negara Malaysia untuk menentukan perkara-perkara yang selaras dengan peruntukan akta.



Untuk maklumat lanjut:



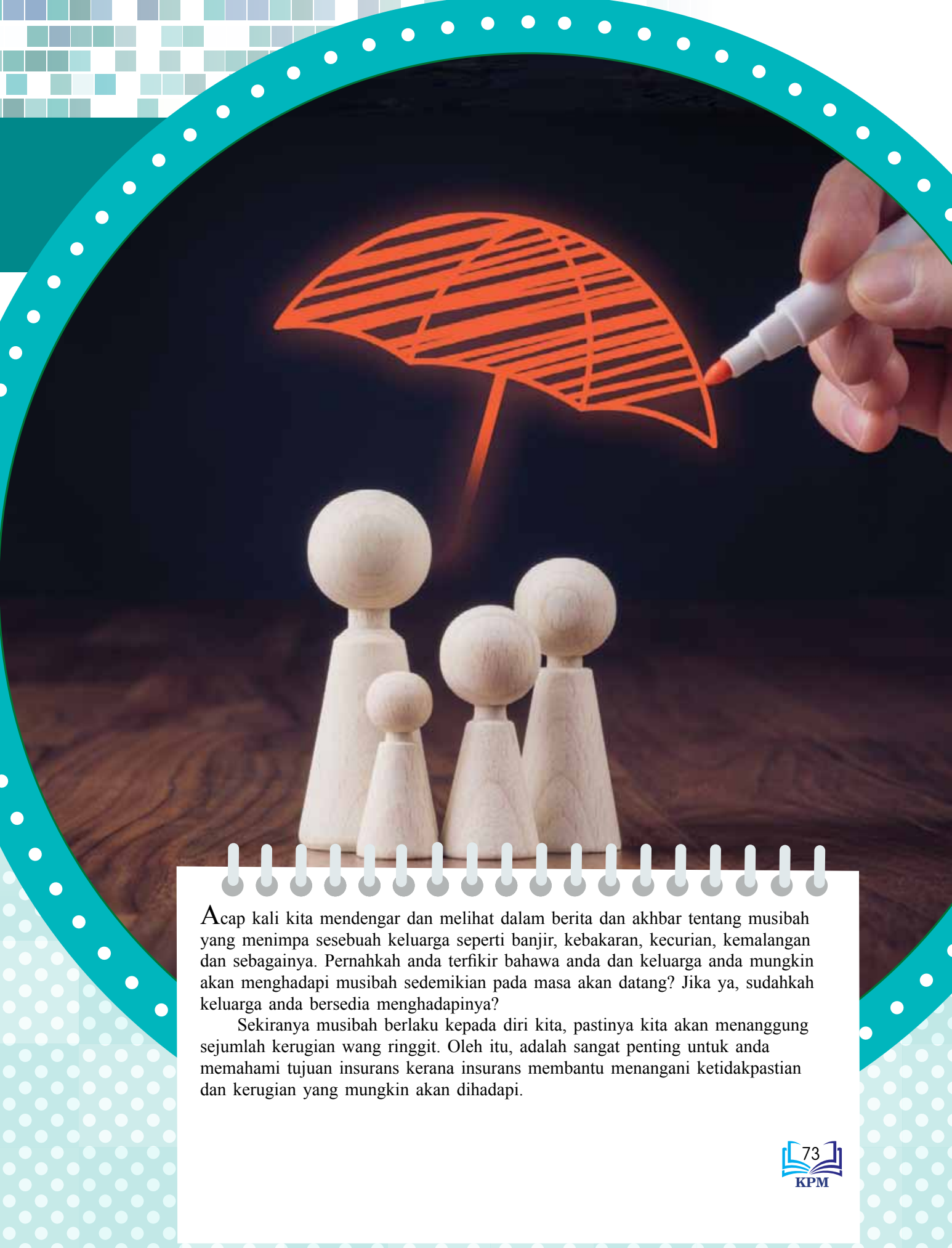
bit.do/TahukahAndaBab3

GERBANG ISTILAH



deduktibel
insurans am
insurans hayat
kadar
ko-insurans
perlindungan
polisi
premium
risiko

*deductible
general insurance
life insurance
rate
co-insurance
coverage
policy
premium
risk*



Acap kali kita mendengar dan melihat dalam berita dan akhbar tentang musibah yang menimpa sesebuah keluarga seperti banjir, kebakaran, kecurian, kemalangan dan sebagainya. Pernahkah anda terfikir bahawa anda dan keluarga anda mungkin akan menghadapi musibah sedemikian pada masa akan datang? Jika ya, sudahkah keluarga anda bersedia menghadapinya?

Sekiranya musibah berlaku kepada diri kita, pastinya kita akan menanggung sejumlah kerugian wang ringgit. Oleh itu, adalah sangat penting untuk anda memahami tujuan insurans kerana insurans membantu menangani ketidakpastian dan kerugian yang mungkin akan dihadapi.

3.1 Risiko dan Perlindungan Insurans

 Apakah maksud risiko dan kepentingan perlindungan insurans?

Risiko

Tahukah anda bahawa setiap daripada kita adalah terdedah kepada bahaya yang mungkin menimpa diri, keluarga atau harta benda kita?



Standard Pembelajaran

Menjelaskan maksud risiko dan kepentingan perlindungan insurans, dan seterusnya mengenal pasti jenis insurans hayat dan insurans am bagi melindungi pelbagai jenis risiko.

Buletin Ilmiah

Elemen penting dalam definisi risiko:

- (i) Risiko tidak dapat ditentukan
- (ii) Risiko yang melibatkan kerugian

Kemalangan jalan raya yang mencederakan pemandu dan penumpang kenderaan yang terlibat, kemusnahan harta benda disebabkan kebakaran, bil perubatan yang tinggi akibat penyakit kritikal dan sebagainya mungkin boleh berlaku dalam kehidupan kita. Sudah semestinya kejadian seperti ini menyebabkan kita menanggung kerugian. Hakikat bahawa diri kita terdedah kepada kerugian sedemikian dan ketidakpastian sama ada perkara tersebut akan berlaku kepada diri kita atau tidak menyebabkan wujudnya risiko dalam kehidupan kita. Oleh itu, **risiko** secara umumnya ialah kemungkinan berlakunya musibah yang tidak dapat dielakkan.

Kehidupan sebagai seorang murid tidak terlepas daripada kebarangkalian berdepan dengan risiko. Risiko yang mungkin anda hadapi adalah seperti mengalami kemalangan ketika dalam perjalanan pergi ke sekolah, mengalami kecederaan semasa dalam perlawanan bola sepak atau terjatuh di tangga semasa dalam perjalanan ke perpustakaan sekolah.

Walaupun anda mungkin menjalani kehidupan dengan berhati-hati dan mengamalkan cara hidup yang sihat, risiko anda berdepan dengan perkara yang tidak diingini masih ada. Oleh itu, dengan wujudnya insurans kepada semua lapisan umur, anda akan diberikan satu perlindungan kewangan jika kejadian yang tidak diingini berlaku kepada anda.

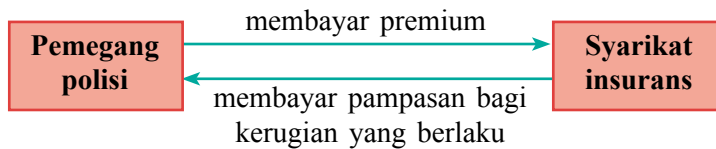
Minda Kritis

Antara berikut, risiko yang manakah boleh diukur dengan wang? Bincangkan.

- (i) Risiko membeli sebuah kereta terpakai.
- (ii) Risiko membuat pelaburan dalam pasaran saham.
- (iii) Risiko motosikal dicuri.

Insurans

Insurans bertujuan memindahkan risiko daripada individu kepada organisasi insurans. Kontrak insurans dimeterai antara syarikat insurans dengan pemilik insurans. Dalam kontrak ini, syarikat insurans dikehendaki membayar ganti rugi atau pampasan bagi kerugian yang dilindungi seperti yang dinyatakan dalam polisi, sebagai balasan kepada bayaran premium yang dibuat oleh pemegang polisi.



Jumlah pembayaran ganti rugi yang akan dibayar kepada pemegang polisi adalah hanya setakat jumlah kerugian yang dialami. Hal ini demikian kerana, prinsip utama dalam sistem insurans adalah untuk memulihkan kedudukan kewangan pemegang polisi kepada keadaan sebelum berlakunya kerugian, yang juga dikenali sebagai **prinsip indemniti**. Oleh itu, prinsip insurans ini tidak akan membenarkan pemegang polisi memperoleh keuntungan daripada insurans yang dibeli.

Insurans tidak boleh menghalang sesuatu kerugian daripada berlaku tetapi insurans berkepentingan untuk mengurangkan beban kewangan yang akan ditanggung oleh pemegang polisi apabila berlakunya kerugian atau kemalangan. Hal ini demikian kerana, pembelian amaun insurans yang mencukupi akan menghapuskan ketidakpastian terhadap kerugian kewangan jika berlakunya kerugian yang diinsuranskan itu.

Apakah insurans hayat dan insurans am?

Insurans terbahagi kepada dua jenis insurans utama, iaitu insurans hayat dan insurans am. Kedua-dua insurans ini melindungi pelbagai risiko yang berbeza.

Buletin Ilmiah

Syarikat insurans

Pihak yang bersetuju untuk membayar pampasan atas kerugian yang telah diinsuranskan.

Pemegang polisi (pemilik insurans)

Pihak yang akan menuntut dan menerima pampasan atas kerugian yang dialami.

Kontrak insurans

Suatu polisi dan sebagai bukti kepada perjanjian yang telah dibuat antara syarikat insurans dengan pemegang polisi.

Premium

Jumlah wang yang dibayar oleh pemegang polisi kepada syarikat insurans.

Buletin Ilmiah

Prinsip indemniti:

Syarikat insurans akan membayar ganti rugi kepada pemegang polisi sekiranya berlaku kerugian yang diinsuranskan pada amaun yang tidak melebihi kerugian yang dialami, tertakluk kepada jumlah perlindungan yang diinsuranskan.

MOBILISASI MINDA 1 Berkumpulan

Tujuan: Menentukan kepentingan insurans bagi melindungi pelbagai jenis risiko.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan.
2. Setiap kumpulan perlu mencari beberapa keratan surat khabar atau berita dalam talian yang melibatkan bencana yang menimpa individu atau sesebuah keluarga.

3. Berdasarkan situasi dalam berita itu, kenal pasti jenis kerugian yang dialami dan jenis risiko yang dilindungi insurans.

Situasi	Jenis kerugian yang dialami	Jenis risiko yang dilindungi insurans

4. Bentangkan hasil kumpulan anda dengan menggunakan kaedah Galeri Jelajah Minda (*Gallery Walk*).

Perbincangan:

Mengapakah insurans penting kepada pemegang polisi?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 1, didapati bahawa insurans berkepentingan dalam melindungi pelbagai jenis risiko yang akan mengakibatkan kerugian yang tidak disengajakan dan boleh menyebabkan pemegang polisi menanggung kerugian kewangan.

Insurans hayat

Insurans hayat menjamin pembayaran manfaat kewangan kepada pemegang polisi sekiranya berlaku kematian terhadap orang yang diinsuranskan atau bawah keadaan yang ditetapkan dalam kontrak. Risiko yang dilindungi oleh insurans hayat adalah seperti berikut:



Tujuan insurans hayat adalah untuk menyediakan perlindungan kewangan kepada ahli keluarga yang bergantung pada pemegang polisi apabila pemegang polisi meninggal dunia. Namun, sekiranya pemegang polisi masih hidup tetapi mengalami hilang upaya menyeluruh dan kekal, pemegang polisi boleh menerima pampasan daripada syarikat insurans berdasarkan syarat yang ditetapkan dalam polisi insurans hayatnya.



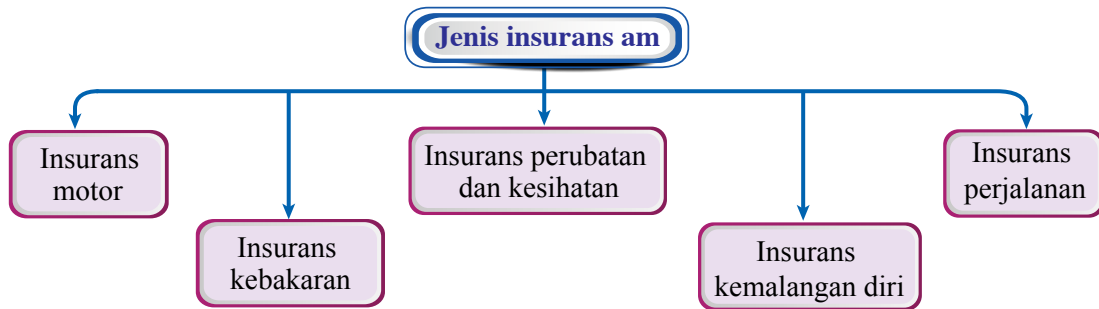
Aktuari ialah seorang pakar mengurus dan menghitung risiko dalam premium polisi insurans, kadar anuiti dan lain-lain untuk sesebuah syarikat insurans.



Adakah pembayaran ganti rugi akan dibuat sekiranya tiada kerugian yang berlaku? Bincangkan.

Insurans am

Insurans am memberikan perlindungan daripada sebarang kerugian atau kerosakan harta benda yang ditanggung, selain risiko yang dilindungi dalam insurans hayat. Terdapat banyak jenis insurans am yang melindungi pelbagai risiko.



(i) Insurans motor

Insurans motor memberikan perlindungan terhadap sebarang kerugian atau kerosakan berkaitan dengan penggunaan kenderaan berenjin. Jadual di bawah menunjukkan empat jenis polisi insurans motor yang melindungi kenderaan anda.

Buletin Ilmiah

Insurans motor merupakan insurans yang wajib dimiliki oleh setiap pemilik kenderaan di Malaysia yang tertakluk bawah Akta Pengangkutan Jalan 1987.

Polisi Perlindungan	Akta	Pihak ketiga	Pihak ketiga, kebakaran & kecurian	Komprehensif
Liabiliti kepada pihak ketiga akibat kecederaan dan kematian.	Ya	Ya	Ya	Ya
Kerugian terhadap harta benda yang dialami pihak ketiga.	Tidak	Ya	Ya	Ya
Kerugian terhadap kenderaan sendiri akibat kebakaran yang tidak disengajakan atau kecurian.	Tidak	Tidak	Ya	Ya
Kerugian dan kerosakan terhadap kenderaan sendiri akibat kemalangan.	Tidak	Tidak	Tidak	Ya

Polisi komprehensif memberikan perlindungan yang menyeluruh berbanding dengan tiga polisi di atas. Persamaan bagi polisi-polisi ini ialah perlindungan tidak merangkumi tuntutan pemandu dan penumpang kenderaan seperti kecederaan dan kematian.

Sebagai contoh, Agus memandu kereta miliknya dengan membawa seorang penumpang iaitu kawannya, Faizal. Dalam perjalanannya itu, kereta Agus telah hilang kawalan lalu melanggar sebuah kereta lain yang dipandu oleh Devi. Agus, Faizal dan Devi telah mengalami kecederaan manakala kereta Agus dan Devi mengalami kerosakan.

Buletin Ilmiah

Dalam insurans motor, pihak

- pertama → pemandu (pemegang polisi)
- kedua → syarikat insurans
- ketiga → mana-mana individu yang terlibat dalam kemalangan disebabkan oleh pemandu tidak termasuk penumpang.

Jika Agus menginsuranskan keretanya bawah polisi komprehensif, polisi ini akan melindungi tuntutan kerugian kecederaan dan kerosakan kereta pihak ketiga, iaitu Devi dan kerugian kerosakan kereta Agus. Walau bagaimanapun, kos perubatan kecederaan yang dialami oleh Agus dan Faizal tidak akan dilindungi.

Buletin Ilmiah

Liabiliti ialah jumlah hutang yang perlu dijelaskan dengan wang, barang, atau perkhidmatan.

(ii) Insurans kebakaran

Insurans kebakaran memberikan perlindungan terhadap kerugian akibat kebakaran, kilat dan letupan yang berlaku pada rumah kediaman ataupun bangunan perniagaan. Pampasan akan dibayar oleh syarikat insurans untuk memulihkan kedudukan kewangan pemegang polisi, tertakluk kepada jumlah yang diinsuranskannya. Bagi mendapatkan perlindungan selain daripada kebakaran, kilat dan letupan, pemegang polisi boleh memasukkan perlindungan tambahan seperti taufan, banjir, rusuhan dan sebagainya dalam polisi kebakaran yang sedia ada dengan tambahan premium.

(iii) Insurans perubatan dan kesihatan

Selain risiko kematian, anda juga perlu memberikan perhatian kepada risiko kemerosotan kesihatan yang mungkin dihadapi. Hal ini demikian kerana anda mungkin terpaksa menanggung perbelanjaan perubatan seperti kos kemasukan ke hospital dan pembedahan. Antara polisi yang terdapat dalam insurans ini ialah:

- insurans hospital dan pembedahan
- insurans penyakit kritikal
- insurans pendapatan akibat hilang upaya
- insurans pendapatan hospital

Buletin Ilmiah

Imbas kod QR atau layari bit.do/Bab3IPK untuk maklumat tambahan mengenai insurans perubatan dan kesihatan.



(iv) Insurans kemalangan diri

Insurans kemalangan diri memberikan perlindungan sekiranya pemegang polisi mengalami kecederaan anggota badan, kecacatan, hilang upaya ataupun meninggal dunia berpunca secara langsung daripada kemalangan. Insurans ini adalah berbeza daripada insurans hayat, dan insurans perubatan dan kesihatan.

(v) Insurans perjalanan

Insurans perjalanan melindungi pemegang polisi terhadap kerugian dalam perjalanan sama ada melalui darat, udara atau laut seperti kematian dan kecacatan kekal, kehilangan bagasi, passport dan duit, belanja perubatan dan lain-lain.

Medan Interaktif

Mengapakah insurans perubatan dan kesihatan penting walaupun kerajaan menyediakan perkhidmatan perubatan dan kesihatan di hospital-hospital kerajaan? Bincangkan.

Tempoh perlindungan bagi kebanyakan polisi insurans am ialah satu tahun ataupun kurang dari tempoh satu tahun. Premium yang dibayar pula adalah pada satu-satu masa apabila anda memerlukan perlindungan polisi tersebut.

Insurans berkelompok

Insurans berkelompok secara asasnya memberikan perlindungan kepada sekumpulan individu, biasanya pekerja syarikat atau murid sekolah dan pelajar institusi pendidikan.

- **Insurans berkelompok kepada organisasi**

Perlindungan kewangan disediakan kepada pekerja sesebuah organisasi seperti kematian, hilang upaya, kemasukan hospital dan pembedahan dengan polisi dan had perlindungan tertentu. Dengan adanya insurans ini, pekerja-pekerja syarikat tersebut akan menikmati perlindungan sewajarnya daripada majikan mereka.

- **Insurans berkelompok kepada murid**

Perlindungan kewangan disediakan kepada murid seperti kematian, lumpuh, kecacatan dan elaun kerusi roda dengan polisi dan had perlindungan tertentu. Sebagai contoh, Kementerian Pendidikan Malaysia telah melaksanakan skim perlindungan kepada murid sekolah-sekolah kerajaan dan bantuan kerajaan bawah skim Takaful Pelajar Sekolah Malaysia (TPSM).

Buletin Ilmiah



Skim perlindungan masyarakat mySalam adalah inisiatif kerajaan yang bertujuan menyediakan perlindungan kesihatan takaful percuma kepada 8 juta individu rakyat Malaysia. Layari mysalam.com.my untuk maklumat lanjut.

Secara umumnya, tujuan anda mendapatkan insurans adalah seperti berikut:

- ✓ Sebagai bantuan kewangan kepada keluarga sekiranya anda hilang upaya, menghadapi penyakit kritikal atau meninggal dunia
- ✓ Mengurus perbelanjaan hidup, hutang dan komitmen sekiranya anda tidak mampu bekerja
- ✓ Bayaran perbelanjaan perubatan rawatan yang tinggi
- ✓ Sebagai pampasan terhadap kerugian yang dialami

Latih Kendiri 3.1a

1. Berdasarkan situasi di bawah, jawab soalan berikut.

Encik Daud membeli satu polisi insurans untuk dirinya jika dia terlibat dengan kemalangan daripada Syarikat Insurans Bersatu berjumlah RM300 000 dengan bayaran bulanan RM100.

- (a) Siapakah syarikat insurans dan pemegang polisi?
- (b) Berapakah had perlindungan?
- (c) Berapakah nilai premium bulanan?
- (d) Nyatakan risiko yang diinsuranskan.

2.

Pada suatu hari, kereta Melisa telah melanggar sebuah kereta lain dalam satu kemalangan dan dia didapati bersalah. Akibat kemalangan itu, kedua-dua buah kereta mengalami kerosakan teruk dan pemandu kereta yang melanggar Melisa mengalami kecederaan patah kaki. Melisa ingin membuat tuntutan kerosakan bagi kedua-dua buah kereta serta kos rawatan kecederaan pemandu tersebut.

Berdasarkan senario di atas, nyatakan tuntutan yang boleh dibuat oleh Melisa kepada syarikat insuransnya jika dia menginsuranskan keretanya bawah polisi pihak ketiga.



Bagaimanakah mengkaji, mentafsir dan membuat pengiraan yang melibatkan kadar dan premium insurans?

Standard Pembelajaran

Mengkaji, mentafsir dan membuat pengiraan yang melibatkan kadar dan premium insurans.

Contoh 1

Jadual di bawah menunjukkan harga premium bagi insurans perjalanan yang ditawarkan oleh Syarikat Insurans PQ Bhd. ke negara-negara Asia dan Eropah.

Bilangan hari	Pemegang polisi (RM)		Pemegang polisi dan pasangan (RM)		Keluarga (RM)	
	Asia	Eropah	Asia	Eropah	Asia	Eropah
1 – 5	39	53	69	98	87	133
6 – 10	58	79	107	150	136	184
11 – 18	79	127	152	246	218	304
Premium tahunan (berumur 18 – 69 tahun)	230	280	–	–	–	–

- Apakah faktor yang mempengaruhi perbezaan harga premium bagi insurans perjalanan itu?
- Mengapakah semakin panjang tempoh perjalanan, semakin tinggi harga premium?
- Pekerjaan Shahir sebagai seorang jurugambar memerlukan dia melawat banyak negara Eropah dalam tempoh setahun. Dia akan mengunjungi sesebuah negara antara 12 hingga 15 hari. Insurans yang manakah patut dibeli oleh Shahir sesuai dengan pekerjaannya? Berikan alasan anda.

Penyelesaian:

- Destinasi, tempoh perjalanan dan bilangan orang yang diinsuranskan.
- Tempoh perjalanan yang lebih panjang meningkatkan kebarangkalian kerugian berlaku pada pemegang polisi semasa berada di luar negara.
- Shahir patut membeli insurans perjalanan premium tahunan bagi negara-negara Eropah kerana ini lebih menjimatkan daripada membeli insurans bagi tempoh 11 hingga 18 hari setiap kali perjalanan.

Bagaimanakah mengira premium bagi insurans hayat?

Bagi insurans hayat, nilai premium yang dibayar bergantung pada nilai muka yang dipilih, umur, jantina dan sama ada merokok atau tidak. Pengiraan premium ini merujuk kepada jadual kadar premium bagi setiap RMx nilai muka.

$$\text{Premium} = \frac{\text{Nilai muka polisi}}{\text{RMx}} \times \left(\text{Kadar premium per RMx} \right)$$

Contoh 2

Jadual kadar premium tahunan bagi setiap RM1 000 nilai muka insurans sementara boleh baharu tahunan yang ditawarkan oleh Syarikat Insurans XYZ adalah seperti berikut.

Umur	Lelaki (RM)		Perempuan (RM)	
	Bukan perokok	Perokok	Bukan perokok	Perokok
35	2.12	2.72	1.45	1.78
36	2.18	2.80	1.50	1.84
37	2.26	2.91	1.56	1.93
38	2.36	3.05	1.63	2.03
39	2.49	3.23	1.71	2.14
40	2.66	3.47	1.80	2.26

- Mengapakah kadar premium semakin tinggi?
 - apabila umur semakin meningkat?
 - bagi seorang perokok?
- Berdasarkan jadual tersebut, hitung premium tahunan bagi setiap situasi berikut.
 - Encik Guan ingin membeli polisi insurans tersebut bernilai RM100 000. Dia berumur 39 tahun, seorang yang sihat dan tidak merokok.
 - Puan Shapuva berumur 36 tahun, seorang yang sihat dan tidak merokok ingin membeli polisi insurans tersebut bernilai RM250 000 dan menambah polisi penyakit kritikal. Syarikat Insurans XYZ menawarkan polisi penyakit kritikal dengan memberikan perlindungan sebanyak 30% nilai muka asas dan kadar premium bagi setiap RM1 000 ialah RM1.77 mengikut umur dan status kesihatan Puan Shapuva.

Penyelesaian:

- Kadar premium meningkat dengan peningkatan umur kerana jangka hayat setiap orang semakin pendek dengan penambahan umur.
 - Kebarangkalian seorang perokok terdedah kepada risiko penyakit lebih tinggi berbanding dengan seseorang yang mengamalkan gaya hidup sihat.

Buletin Ilmiah

- Jadual kadar premium memberikan amaun kasar premium yang dikenakan kepada pemegang polisi.
- Nilai muka polisi ialah jumlah wang yang dipilih oleh pemegang polisi untuk mendapatkan perlindungan insurans. Jumlah ini akan dibayar kepada waris jika berlakunya kematian atau kecacatan kekal dan menyeluruh pemegang polisi pada tarikh matang polisi.

Buletin Ilmiah

Insurans sementara boleh baharu tahunan memberikan perlindungan dalam tempoh setahun dan boleh diperbaharui untuk tahun berikutnya seperti yang ditetapkan oleh syarikat insurans.

- (b) (i) Berdasarkan jadual, kadar premium ialah RM2.49.

Premium tahunan Encik Guan

$$= \frac{\text{RM}100\,000}{\text{RM}1\,000} \times \text{RM}2.49$$

$$= \text{RM}249.00$$

- (ii) Berdasarkan jadual, kadar premium ialah RM1.50.

Jumlah perlindungan untuk penyakit kritikal

$$= \frac{30}{100} \times \text{RM}250\,000$$

$$= \text{RM}75\,000$$

Premium tahunan Puan Shapuva

= Premium asas tahunan + Premium tambahan tahunan penyakit kritikal

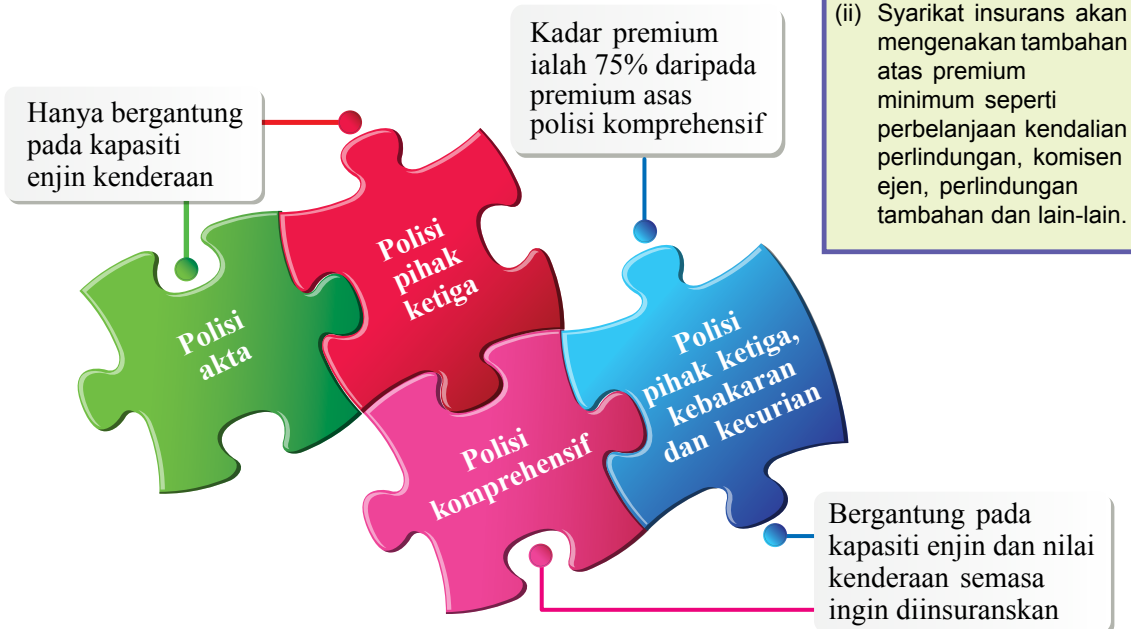
$$= \frac{\text{RM}250\,000}{\text{RM}1\,000} \times \text{RM}1.50 + \frac{\text{RM}75\,000}{\text{RM}1\,000} \times \text{RM}1.77$$

$$= \text{RM}375 + \text{RM}132.75$$

$$= \text{RM}507.75$$

Bagaimanakah mengira premium bagi insurans motor?

Insurans motor dikira berdasarkan Tarif Motor yang menyediakan premium minimum bagi perlindungan insurans tersebut. Tarif ini dikawal oleh undang-undang. Jumlah premium bergantung pada faktor-faktor seperti jenis kenderaan, kegunaan kenderaan, kapasiti enjin, jenis dan jumlah perlindungan yang diinginkan. Kadar premium yang dikenakan adalah berbeza bagi setiap polisi motor.



Buletin Ilmiah

- (i) Tarif ialah senarai harga tetap yang digunakan untuk menyelaraskan dan mengawal caj premium dan susunan kata polisi bawah akta insurans.
- (ii) Syarikat insurans akan mengenakan tambahan atas premium minimum seperti perbelanjaan kendalian perlindungan, komisen ejen, perlindungan tambahan dan lain-lain.

Jadual di bawah menunjukkan pengkadar premium bawah Tarif Motor bagi polisi motor yang dikeluarkan di Semenanjung Malaysia, Sabah dan Sarawak.

Kapasiti enjin tidak melebihi (cc)	Semenanjung Malaysia		Sabah dan Sarawak	
	Polisi komprehensif (RM)	Polisi pihak ketiga (RM)	Polisi komprehensif (RM)	Polisi pihak ketiga (RM)
1 400	273.80	120.60	196.20	67.50
1 650	305.50	135.00	220.00	75.60
2 200	339.10	151.20	243.90	85.20
3 050	372.60	167.40	266.50	93.60
4 100	404.30	181.80	290.40	101.70
4 250	436.00	196.20	313.00	110.10
4 400	469.60	212.40	336.90	118.20
Melebihi 4 400	501.30	226.80	359.50	126.60

* Bagi polisi komprehensif, kadar yang dikenakan adalah bagi RM1 000 pertama daripada jumlah yang diinsuranskan

Sumber: Jadual Tarif Motor 2015

Rumus mengira premium asas polisi komprehensif:

- Bagi Semenanjung Malaysia, premium asas
= Kadar bagi RM1 000 yang pertama + RM26 bagi setiap RM1 000 atau sebahagian daripada itu bagi nilai yang melebihi RM1 000
- Bagi Sabah dan Sarawak, premium asas
= Kadar bagi RM1 000 yang pertama + RM20.30 bagi setiap RM1 000 atau sebahagian daripada itu bagi nilai yang melebihi RM1 000



Layari laman sesawang Persatuan Insurans Am Malaysia (PIAM) untuk mendapatkan maklumat lebih lanjut mengenai perkhidmatan insurans am di Malaysia.
<http://www.piam.org.my/>

Contoh 3

Encik Ramli mempunyai sebuah kereta model Proton Exora 1.6 untuk digunakan di Semenanjung Malaysia. Maklumat kereta itu adalah seperti berikut.

Jumlah yang ingin diinsuranskan : RM60 000
Umur kenderaan : 5 tahun
Kapasiti enjin : 1 600 cc
NCD : 25%



Hitung premium kasar bagi kereta Encik Ramli untuk polisi komprehensif, polisi pihak ketiga, kebakaran dan kecurian, dan polisi pihak ketiga.

Penyelesaian:

Bagi polisi komprehensif:

(a) RM1 000 yang pertama	RM305.50
(b) $RM26 \times 59$ (setiap RM1 000 baki)	RM1 534
(c) Premium asas = (a) + (b)	RM1 839.50
(d) NCD 25%	RM459.88
(e) Premium kasar = (c) – (d)	RM1 379.62

Rujuk pada jadual.

$$\frac{60\,000 - 1\,000}{1\,000} = 59$$

$$0.25 \times 1\,839.50 = 459.88$$

Bagi polisi pihak ketiga, kebakaran dan kecurian:

(a) Premium asas	RM1 379.63
(b) NCD 25%	RM344.91
(c) Premium kasar = (a) – (b)	RM1 034.72

$$0.75 \times 1\,839.50 = 1\,379.63$$

$$0.25 \times 1\,379.63 = 344.91$$

Bagi polisi pihak ketiga:

(a) Premium asas	RM135.00
(b) NCD 25%	RM33.75
(c) Premium kasar = (a) – (b)	RM101.25

Rujuk pada jadual.

$$0.25 \times 135.00 = 33.75$$

Buletin Ilmiah

Klausa Diskaun Tanpa Tuntutan (NCD) akan diberikan jika tiada tuntutan dibuat terhadap insurans motor anda dalam tempoh perlindungan sebelum pembaharuan polisi dibuat. Oleh itu, premium yang perlu dibayar boleh dikurangkan oleh kelayakan NCD anda. Anda akan kehilangan keseluruhan kelayakan NCD anda apabila tuntutan kerosakan sendiri atau pihak ketiga dibuat terhadap polisi anda. Kelayakan NCD bergantung pada kelas kenderaan anda dan bilangan tahun pengalaman memandu yang berterusan tanpa tuntutan.

Walau bagaimanapun, premium yang dibayar mungkin berlainan dengan nilai premium sebenar tertakluk kepada syarikat insurans kerana terdapat caj tambahan yang perlu dibayar oleh pemilik polisi seperti komisen kepada ejen, cukai perkhidmatan dan duti setem.

Latih Kendiri 3.1b

1. Jadual di bawah menunjukkan sebahagian faedah bagi insurans kemalangan diri yang ditawarkan oleh Syarikat Insurans RST.

Faedah	Jumlah perlindungan (RM)	Premium tahunan mengikut pekerjaan	
		Kelas 1 & 2 (RM)	Kelas 3 (RM)
Kematian akibat kemalangan	100 000	364.75	1 065.40
Hilang upaya kekal dan menyeluruh	200 000		
Hilang upaya kekal	150 000		

- * Kelas 1 – Pekerjaan dalam industri tidak berbahaya dan bekerja di dalam pejabat.
- * Kelas 2 – Pekerjaan yang melibatkan tugas-tugas bukan manual dalam industri separa bahaya.
- * Kelas 3 – Pekerjaan yang melibatkan tugas-tugas manual dan penggunaan peralatan atau mesin jentera.

Pada pendapat anda, apakah yang menyebabkan bayaran premium bagi pekerjaan kelas 3 lebih tinggi berbanding dengan kelas 1 dan 2?

2. Jadual di bawah menunjukkan kadar premium tahunan per RM1 000 nilai muka insurans hayat boleh baharu yang ditawarkan oleh sebuah syarikat insurans.

Umur	Lelaki (RM)		Perempuan (RM)	
	Bukan perokok	Perokok	Bukan perokok	Perokok
27	2.12	2.72	1.18	1.40
28	2.12	2.73	1.19	1.42
29	2.12	2.75	1.21	1.44
30	2.12	2.79	1.23	1.46

Dengan nilai muka sebanyak RM120 000,

- hitung premium tahunan bagi seorang lelaki berumur 29 tahun yang merokok dan yang tidak merokok,
 - hitung premium tahunan bagi seorang perempuan berumur 30 tahun yang merokok dan yang tidak merokok.
3. Encik Zakri menetap di Semenanjung Malaysia. Dia ingin membeli satu polisi insurans motor dan berikut ialah maklumat kenderaan yang ingin diinsuranskannya.

Jumlah yang ingin diinsuranskan	: RM85 000
Umur kenderaan	: 6 tahun
Kapasiti enjin	: 2 494 cc
NCD	: 30%

Hitung premium kasar bagi polisi komprehensif, polisi pihak ketiga, kebakaran dan kecurian, dan polisi pihak ketiga berdasarkan Jadual Tarif Motor 2015.

Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan insurans?

Kerugian yang encik alami berjumlah RM5 500. Syarikat insurans akan membayar sebanyak RM5 300. Baki RM200 akan ditanggung oleh encik.

Mengapa saya tidak mendapat pampasan sepenuhnya?



Terdapat beberapa peruntukan dalam kontrak insurans yang menyebabkan pemegang polisi mungkin menerima pampasan kurang daripada kerugian sebenar dan perlu menanggung sebahagian daripadanya. Antara peruntukan tersebut ialah **deduktibel** dan **ko-insurans**, yang juga dikenali sebagai insurans bersama.

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan insurans termasuk deduktibel dan ko-insurans.

Tip Bestari

Baca polisi kontrak insurans dengan teliti sebelum anda bersetuju membeli polisi insurans tersebut dan dapatkan penerangan yang lebih jelas daripada ejen insurans anda.

Apa itu deduktibel?

Deduktibel ialah suatu jumlah yang perlu ditanggung oleh pemegang polisi sebelum layak membuat tuntutan daripada syarikat insurans. Kebiasaannya deduktibel terdapat dalam kontrak insurans harta, insurans perubatan dan kesihatan, dan insurans motor. Peruntukan ini tidak terdapat dalam insurans hayat dan insurans liabiliti diri.

Contoh 4

Puan Suhaila telah membeli insurans motor untuk keretanya yang mempunyai peruntukan deduktibel sebanyak RM300. Sepanjang tempoh insurans tersebut, Puan Suhaila telah mengalami tiga kali kemalangan. Kerugian yang dialami adalah pada bulan Mac, Julai dan Ogos masing-masing sebanyak RM2 800, RM250 dan RM400. Nyatakan sama ada Puan Suhaila boleh membuat tuntutan terhadap kerugian yang dialami atau tidak. Jika ya, nyatakan jumlah bayaran pampasan yang boleh dituntutnya bagi setiap kerugian yang dialami.

Penyelesaian:

Bulan	Kerugian (RM)	Boleh buat tuntutan?	Bayaran pampasan (RM)
Mac	2 800	Boleh	2 500
Julai	250	Tidak	Tiada
Ogos	400	Boleh	100

Jumlah kerugian melebihi amaun deduktibel. Maka, tuntutan boleh dibuat. Bayaran pampasan = $\text{RM2 800} - \text{RM300} = \text{RM2 500}$

Jumlah kerugian kurang daripada amaun deduktibel. Maka, tuntutan tidak boleh dibuat bagi kerugian ini.

Jumlah kerugian melebihi amaun deduktibel. Maka, tuntutan boleh dibuat. Bayaran pampasan = $\text{RM400} - \text{RM300} = \text{RM100}$

Dalam insurans motor, pemegang polisi bertanggungjawab menanggung deduktibel wajib sebanyak RM400 sekiranya kenderaan yang diinsuranskan itu dipandu oleh individu yang tidak dinamakan dalam polisi, individu tersebut dinamakan dalam polisi tetapi berumur bawah 21 tahun, pemegang lesen memandu sementara (L) atau pemegang lesen memandu penuh yang kurang dari 2 tahun. Deduktibel lain dikenakan mengikut budi bicara syarikat insurans.

Contoh 5

Cher Lin mempunyai polisi insurans perubatan dengan deduktibel sebanyak RM30 000 setahun dengan had tahunan bernilai RM300 000. Pada tahun pertama dalam tempoh insuransnya, Cher Lin telah dimasukkan ke hospital untuk pembedahan apendiks dan dikenakan kos rawatan sebanyak RM8 000. Pada tahun berikutnya, Cher Lin perlu melakukan pembedahan jantung dan dikenakan kos rawatan sebanyak RM210 000. Nyatakan jumlah yang perlu ditanggung oleh Cher Lin dan jumlah yang dibayar oleh syarikat insurans bagi tahun pertama dan kedua tempoh insuransnya.

Penyelesaian:

Tahun pertama:

Kos rawatan = RM8 000

Kos rawatan kurang daripada amaun deduktibel.

Jumlah yang perlu ditanggung oleh Cher Lin = RM8 000

Tahun kedua:

Kos rawatan = RM210 000 ← Kos rawatan lebih daripada amaun deduktibel.

Jumlah yang perlu ditanggung oleh Cher Lin = RM30 000

Jumlah yang dibayar oleh syarikat insurans

= RM210 000 – RM30 000 ← Kos rawatan – deduktibel

= RM180 000

Apakah ko-insurans dalam insurans harta?

Ko-insurans ialah perkongsian bersama kerugian antara syarikat insurans dengan pemegang polisi.

Bagi fasal ko-insurans dalam insurans harta, pemegang polisi dikehendaki menginsuranskan hartanya pada suatu jumlah tertentu berdasarkan peratusan ko-insurans yang telah ditetapkan oleh syarikat insurans daripada nilai boleh insurans harta tersebut. Sekiranya peruntukan ko-insurans ini tidak dipenuhi, pemegang polisi perlu menanggung sebahagian daripada kerugian bersama-sama syarikat insurans.

Oleh itu, jika pemegang polisi ingin mendapatkan pampasan penuh atas kerugian separa yang dialami, dia perlu menginsuranskan harta tersebut mengikut peruntukan ko-insuransnya.

Jumlah insurans yang harus dibeli
= Peratusan ko-insurans × Nilai boleh insurans harta

Buletin Ilmiah

- (i) Fasal (*clause*) adalah bahagian daripada bab dalam undang-undang.
- (ii) Nilai boleh insurans harta ialah nilai sebenar aset, kos penggantian aset atau nilai lain yang dinyatakan dalam fasal penilaian polisi insurans.

1 Jika nilai yang diinsuranskan = jumlah insurans yang harus dibeli

Bayaran pampasan

= Jumlah kerugian – Deduktibel

dengan keadaan jumlah kerugian $\leq$ jumlah insurans yang telah dibeli.

2 Jika nilai yang diinsuranskan < jumlah insurans yang harus dibeli

Bayaran pampasan

$$= \left(\frac{\text{Jumlah insurans yang telah dibeli}}{\text{Jumlah insurans yang harus dibeli}} \right) \times \left(\text{Jumlah kerugian} \right) - (\text{Deduktibel})$$

3 Mengalami kerugian menyeluruh

Bayaran pampasan

$$= \left(\text{Jumlah insurans yang telah dibeli} \right) - (\text{Deduktibel})$$



Dengan adanya peruntukan deduktibel dan ko-insurans dalam polisi insurans, premium yang dibayar akan menjadi rendah.

Contoh 6

Encik Ismail ingin membeli insurans kebakaran untuk rumahnya. Nilai boleh insurans rumah itu ialah RM350 000. Polisi insurans kebakaran yang ingin dibelinya itu mempunyai peruntukan ko-insurans untuk menginsuranskan 80% daripada nilai boleh insurans hartanya dan deduktibel sebanyak RM2 000.

- Hitung jumlah insurans yang harus dibeli oleh Encik Ismail bagi rumahnya itu.
- Rumah Encik Ismail telah mengalami kebakaran dan jumlah kerugiannya adalah sebanyak RM25 000. Hitung bayaran pampasan yang akan diterima Encik Ismail jika dia menginsuranskan rumahnya
 - pada jumlah insurans yang harus dibelinya,
 - dengan jumlah RM150 000. Seterusnya, hitung nilai penalti ko-insurans.
- Rumah Encik Ismail telah mengalami kerugian menyeluruh. Jika dia menginsuranskan rumahnya dengan jumlah RM200 000, hitung bayaran pampasan yang diterimanya.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{(a) Jumlah insurans yang harus dibeli} &= \frac{80}{100} \times \text{RM350 000} \\ &= \text{RM280 000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) (i) Bayaran pampasan} &= \text{RM25 000} - \text{RM2 000} \\ &= \text{RM23 000} \end{aligned}$$

- (ii) $\text{RM150 000} < \text{RM280 000}$. Jumlah yang diinsuranskan adalah kurang daripada jumlah insurans yang harus dibeli.

$$\begin{aligned} \text{Bayaran pampasan} &= \frac{\text{RM150 000}}{\text{RM280 000}} \times \text{RM25 000} - \text{RM2 000} \\ &= \text{RM13 392.86} - \text{RM2 000} \\ &= \text{RM11 392.86} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Penalti ko-insurans} &= \text{RM25 000} - \text{RM11 392.86} \\ &= \text{RM11 607.14} \end{aligned}$$

Buletin Ilmiah

Jumlah yang ditanggung oleh pemegang polisi atas kerugian separa yang dialami akibat tidak memenuhi peruntukan ko-insurans dikenali sebagai penalti ko-insurans.

Penalti ko-insurans adalah bersamaan dengan 46.4% daripada jumlah kerugian

$$\begin{aligned} \text{(c) Bayaran pampasan} &= \text{RM200 000} - \text{RM2 000} \\ &= \text{RM198 000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kerugian yang ditanggung Encik Ismail} &= \text{RM350 000} - \text{RM198 000} \\ &= \text{RM152 000} \end{aligned}$$

Jika pemegang polisi menginsuranskan hartanya dengan jumlah lebih besar daripada jumlah yang harus dibeli mengikut peruntukan ko-insurans, bayaran pampasan yang dihitung menggunakan rumus ko-insurans akan melebihi jumlah kerugian sebenar yang dialami. Walau bagaimanapun, syarikat insurans hanya akan membayar bayaran pampasan tidak melebihi jumlah kerugian yang sebenar. Bayaran maksimum untuk sesuatu kerugian adalah bersamaan dengan jumlah nilai muka insurans yang telah dibeli oleh pemegang polisi.

Apakah ko-insurans dalam insurans kesihatan?

Dalam kontrak insurans kesihatan, ko-insurans ditetapkan dalam fasal penyertaan peratusan, khasnya bagi polisi insurans perubatan utama. Dalam fasal ini, pemegang polisi dikehendaki menanggung sebahagian daripada kos perubatan yang dilindungi kontrak mengikut suatu kadar yang dipersetujui selepas mengambil kira peruntukan deduktibel, sekiranya ada. Sebagai contoh, penyertaan peratusan ko-insurans 80/20 bermaksud syarikat insurans menanggung 80% daripada kos perubatan yang dilindungi oleh polisi dan 20% akan ditanggung oleh pemegang polisi.

Contoh 7

Puan Chen mempunyai polisi insurans perubatan utama dengan peruntukan deduktibel sebanyak RM500 dan fasal penyertaan peratusan ko-insurans 75/25 dalam polisinya. Hitung bayaran kos yang ditanggung oleh syarikat insurans dan Puan Chen sendiri jika kos perubatan yang dilindungi polisinya berjumlah RM20 600.

Penyelesaian:

Kos perubatan selepas deduktibel

$$= \text{RM}20\,600 - \text{RM}500$$

$$= \text{RM}20\,100$$

Bayaran kos yang ditanggung oleh syarikat insurans

$$= \frac{75}{100} \times \text{RM}20\,100$$

$$= \text{RM}15\,075$$

Bayaran kos yang ditanggung oleh Puan Chen

$$= \frac{25}{100} \times \text{RM}20\,100 + \text{RM}500 \quad \leftarrow \text{Deduktibel}$$

$$= \text{RM}5\,525$$

Panduan membuat pilihan insurans yang terbaik buat anda:

Ketahui jumlah perlindungan yang diperlukan.

Fahami skop perlindungan, terma dan syarat polisi.

Bandingkan kadar premium dan manfaat insurans.

Elakkan perlindungan yang tidak perlu.

Contoh 8

Jesnita ingin membeli polisi insurans perubatan untuk dirinya. Dia membuat perbandingan faedah bagi pelan polisi daripada dua buah syarikat insurans yang berbeza, XX dan YY.

Syarikat insurans \ Faedah	XX (RM)	YY (RM)
Had tahunan keseluruhan	50 000	50 000
Bilik hospital dan makanan	160 (maksimum 365 hari setahun)	200 (maksimum 200 hari setahun)
Unit rawatan rapi	Mengikut caj yang dikenakan (maksimum 90 hari setahun)	400 (maksimum 90 hari setahun)
Elaun tunai harian di hospital kerajaan	100 (maksimum 365 hari setahun)	50 (maksimum 200 hari setahun)
Premium tahunan	506.02	637.02

Berdasarkan jadual tersebut, pelan polisi insurans yang manakah lebih baik untuk Jesnita? Justifikasikan jawapan anda.

TiP Bestari

Peruntukan deduktibel perlu dipenuhi oleh pemegang polisi terlebih dahulu sebelum dapat menikmati faedah insurans yang dibelinya.

TiP Bestari

Perbezaan antara deduktibel dengan ko-insurans:

- Deduktibel ialah suatu jumlah yang mesti dibayar dahulu oleh pemegang polisi tanpa mengira jumlah kos manfaat yang layak.
- Ko-insurans ialah perkongsian kos dengan keadaan pemegang polisi menanggung peratusan tertentu daripada kerugian bersama dengan syarikat insurans.

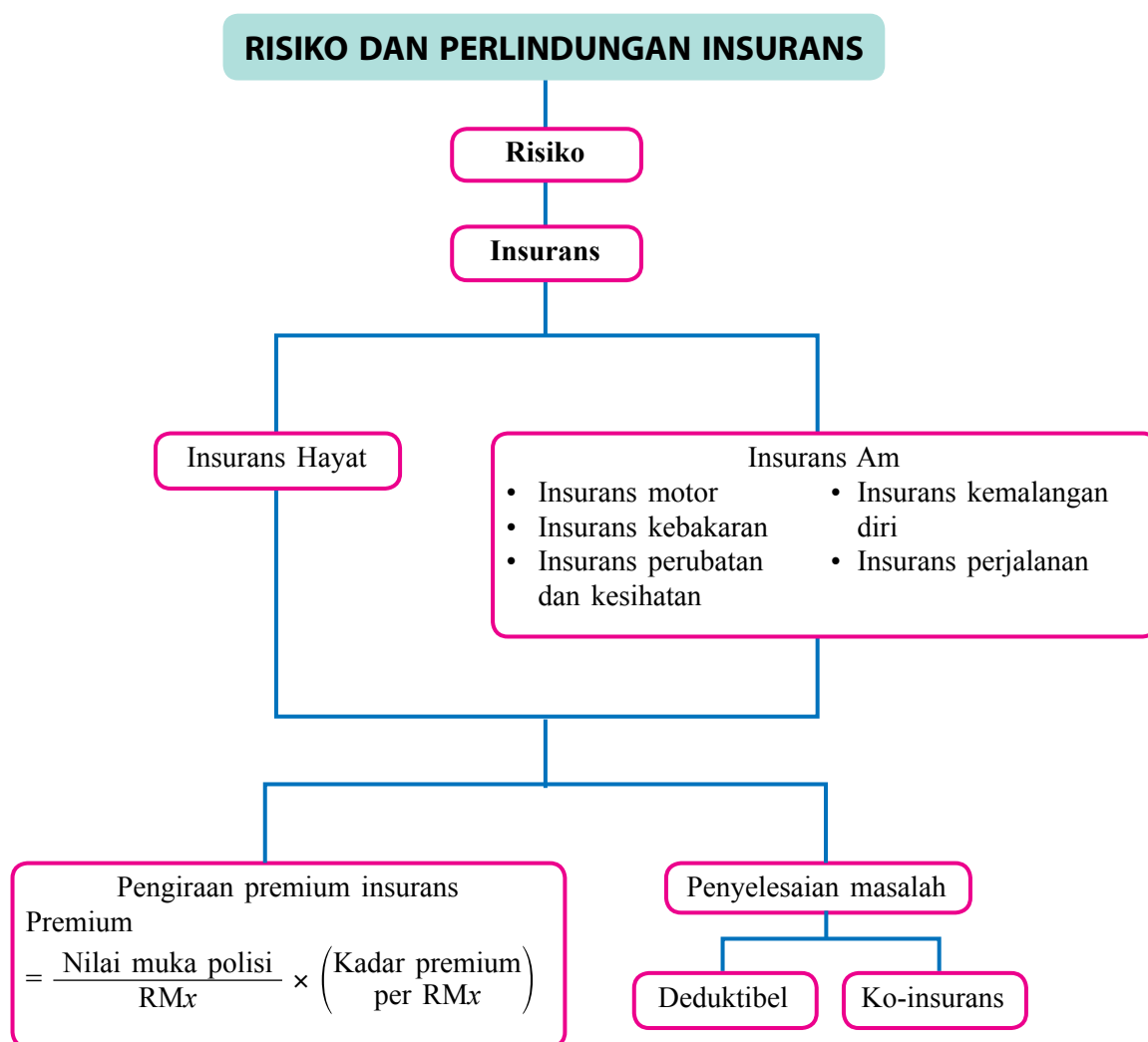
Minda Kritis

Mengapakah insurans kesihatan tidak dikenakan penalti?

Penyelesaian:

Pelan polisi XX adalah lebih baik kerana walaupun kedua-duanya memberikan had tahunan keseluruhan yang sama, iaitu RM50 000, premium tahunan bagi XX adalah lebih kecil berbanding dengan YY. Selain itu, faedah yang ditawarkan juga adalah lebih baik dari segi tempoh perlindungan, iaitu sepanjang tahun bagi bilik hospital dan makanan, dan elaun tunai harian di hospital kerajaan. Tambahan lagi, tiada had perlindungan bagi unit rawatan rapi kerana pampasan dibayar mengikut caj rawatan yang dikenakan kepada pemegang polisi, berbeza dengan polisi YY yang mempunyai had sebanyak RM400 bagi tempoh perlindungan yang sama.

Arena Rumusan



Refleksi

Pada akhir bab ini, saya dapat



menjelaskan maksud risiko dan kepentingan perlindungan insurans, dan seterusnya mengenal pasti jenis insurans hayat dan insurans am bagi melindungi pelbagai jenis risiko.

mengkaji, mentafsir dan membuat pengiraan yang melibatkan kadar dan premium insurans.

menyelesaikan masalah yang melibatkan insurans termasuk deduktibel dan ko-insurans.

PROJEK MINI

Maklumat tentang Encik Farhan:
 Pekerjaan: Pegawai polis
 Gaji bersih bulanan: RM4 300
 Perbelanjaan kasar bulanan: RM3 000
 Simpanan bulanan: RM500
 Bilangan tanggungan: 3
 Status kesihatan: Baik



Maklumat di atas mengenai Encik Farhan, seorang pegawai polis yang telah berkhidmat selama 7 tahun. Dia ingin membeli insurans hayat yang melindungi dirinya dan juga ahli keluarganya. Secara berkumpulan, dapatkan maklumat polisi insurans hayat yang terdapat di Internet. Pilih satu polisi insurans hayat yang terbaik untuk Encik Farhan dan ahli keluarganya. Berikan sebab anda dan bentangkan hasil dapatan kumpulan anda kepada kelas.

Latih Ekstensif

Imbas kod QR atau layari
bit.do/Kuiz03 untuk kuiz interaktif



FAHAM

1. Berikan tiga contoh risiko boleh diinsuranskan yang dihadapi oleh seorang peniaga yang memiliki sebuah bangunan kedai.
2. Mengapakah prinsip indemniti penting dalam kontrak insurans?

3. Apakah perbezaan antara insurans kemalangan diri, insurans hayat, dan insurans perubatan dan kesihatan?
4. Sebuah syarikat insurans membayar pampasan atas tuntutan insurans motor seorang pemegang polisi insuransnya. Tuntutan tersebut mengandungi kerosakan kereta pihak ketiga dan kebakaran kereta yang dialami oleh pemegang polisi. Nyatakan polisi insurans motor yang mungkin telah dibeli oleh pemegang polisi tersebut.

MASTERI

5. Vanitha telah membeli sebuah kereta daripada sahabatnya tanpa membeli insurans motor baharu untuk kereta tersebut kerana insurans motor sedia ada belum tamat lagi. Dia juga tidak menghubungi Jabatan Pengangkutan Jalan Malaysia (JPJ) untuk menukar hak milik kereta tersebut kepada namanya. Pada suatu hari, dia telah mengalami kemalangan dan keretanya telah rosak di bahagian hadapan.

Berdasarkan situasi tersebut, adakah Vanitha boleh membuat tuntutan daripada syarikat insurans yang melindungi kereta tersebut? Berikan justifikasi anda.

6. Syarikat Insurans ABC menawarkan dua pelan insurans hayat dengan kadar premium tahunan bagi setiap RM1 000 nilai muka seperti dalam jadual di sebelah. Kadar premium tersebut adalah untuk lelaki yang sihat dan tidak merokok.

Pelan / Umur	35 tahun	45 tahun
Tempoh 5 tahun	RM5.24	RM7.96
Boleh baharu tahunan	RM4.03	RM5.52

- (a) Rizqi berumur 35 tahun, seorang lelaki yang sihat dan tidak merokok. Dia ingin membeli pelan boleh baharu tahunan bernilai RM150 000. Hitung premium bulanan yang perlu dibayarnya.
- (b) (i) Vincent ingin membeli pelan bertempoh 5 tahun dengan nilai muka RM100 000. Dia berumur 45 tahun, seorang lelaki yang sihat dan tidak merokok. Hitung premium tahunannya.
- (ii) Jika Vincent membeli pelan boleh baharu tahunan dengan nilai muka RM100 000, berapakah beza premium tahunan yang dibayarnya, berbanding dengan pelan bertempoh 5 tahun?
7. Motosikal milik Salleh dilindungi dengan insurans motor yang mempunyai peruntukan deduktibel sebanyak RM150. Sepanjang tempoh insurans tersebut, Salleh telah mengalami tiga peristiwa kemalangan dengan kerugian sebanyak RM90, RM240 dan RM300. Nyatakan sama ada Salleh boleh membuat tuntutan terhadap kerugian yang dialami atau tidak. Jika ya, nyatakan jumlah bayaran pampasan yang boleh dituntutnya bagi setiap kerugian yang dialami.

CABAR

8. Pada tahun 2019, Puan Karen telah disahkan menghidapi barah dan telah membuat pembedahan bagi merawat penyakitnya itu. Perbelanjaan kos pembedahan dan rawatan adalah sebanyak RM130 000. Pada tahun berikutnya, Puan Karen telah mengalami kemalangan yang menyebabkan tulang tangannya patah. Kos merawat tangannya itu

adalah sebanyak RM12 000. Jika Puan Karen mempunyai polisi insurans perubatan dalam tempoh dua tahun itu dengan deduktibel RM5 000 setahun dan had tahunan bernilai RM150 000, nyatakan jumlah yang ditanggung Puan Karen dan jumlah bayaran pampasan yang dibayar oleh syarikat insurans bagi setiap rawatan yang diterimanya pada dua tahun itu.

9.  Encik Gailang ingin membeli insurans kebakaran untuk rumahnya. Syarikat insurans menetapkan bahawa nilai boleh insurans rumah tersebut ialah RM1.3 juta. Polisi insurans kebakaran yang ingin dibelinya mempunyai peruntukan ko-insurans untuk menginsuranskan 70% daripada nilai boleh insurans hartanya dan deduktibel sebanyak RM3 000.
- Hitung jumlah insurans yang harus dibeli oleh Encik Gailang bagi rumahnya itu.
 - Rumah Encik Gailang telah mengalami kebakaran dan jumlah kerugiannya adalah sebanyak RM205 000. Hitung jumlah insurans yang telah dibeli oleh Encik Gailang jika dia telah menerima bayaran pampasan sebanyak
 - RM202 000
 - RM120 000
10. Rumah Encik Adam diinsuranskan dengan insurans kebakaran yang memperuntukkan ko-insurans untuk menginsuranskan 80% daripada nilai boleh insurans rumahnya. Nilai boleh insurans rumah itu ialah RM250 000.
- Hitung jumlah insurans yang harus dibeli oleh Encik Adam.
 - Encik Adam telah menginsuranskan rumahnya mengikut jumlah di (a). Jika keseluruhan rumahnya hangus terbakar, adakah Encik Adam akan menerima bayaran pampasan sebanyak RM250 000? Berikan justifikasi anda.
11. Kos perubatan Sofia yang dilindungi polisi insuransnya berjumlah RM10 800. Dia ingin menuntut pampasan daripada polisi insurans perubatan utamanya yang mempunyai peruntukan deduktibel sebanyak RM300 dan penyertaan peratusan ko-insurans 80/20. Hitung bayaran yang perlu ditanggung oleh Sofia dan bayaran pampasan yang diterimanya.



TEROKAI MATEMATIK

Menurut data Bank Negara Malaysia, hanya 41 peratus rakyat Malaysia dilindungi oleh sekurang-kurangnya satu polisi insurans pada masa ini.

Sumber: Berita Harian, 29 Julai 2019, Kerajaan sasar kadar penembusan insurans negara lebih 75 peratus pada 2020

Semasa Minggu Matematik di sekolah, kumpulan anda perlu memberikan ucapan tentang kesedaran rakyat Malaysia memiliki perlindungan insurans yang masih rendah. Ucapan anda mesti mengandungi aspek berikut:

- ✓ Faktor-faktor yang mempengaruhi tahap kesedaran memiliki insurans yang rendah dalam kalangan rakyat Malaysia
- ✓ Kepentingan memiliki insurans sebagai perlindungan

Bincangkan dalam kumpulan anda dan pilih seorang wakil untuk menyampaikan ucapan itu.

BAB 4

Matematik Pengguna: Percukaian

Apakah yang akan anda pelajari?

- Percukaian

Maslahat Bab Ini

Perakaunan merupakan bidang yang terlibat dengan percukaian. Akauntan memerlukan pemahaman yang menyeluruh mengenai ekonomi dan jenis cukai untuk menyediakan penyata cukai pendapatan bagi pihak korporat atau peribadi.

Tahukah Anda?

Kesultanan Melayu Melaka mempunyai sistem cukai pelabuhan yang teratur yang dikenakan terhadap pedagang mengikut negara dan hubungan negara itu dengan Melaka. Sistem cukai pendapatan pertama diperkenalkan di Persekutuan Tanah Melayu pada tahun 1947 bawah Ordinan Cukai Pendapatan 1947. Ordinan ini kemudiannya digantikan dengan Akta Cukai Pendapatan 1967.



Untuk maklumat lanjut:



bit.do/TahukahAndaBab4

GERBANG ISTILAH



cukai jalan	<i>road tax</i>
cukai jualan dan perkhidmatan	<i>sales and service tax</i>
cukai pendapatan	<i>income tax</i>
cukai pintu	<i>property assessment tax</i>
cukai tanah	<i>quit rent</i>
pelepasan cukai	<i>tax relief</i>
potongan cukai bulanan	<i>monthly tax deduction</i>
rebat	<i>rebate</i>
taksiran cukai berasingan	<i>separate tax assessment</i>
taksiran cukai bersama	<i>joint tax assessment</i>



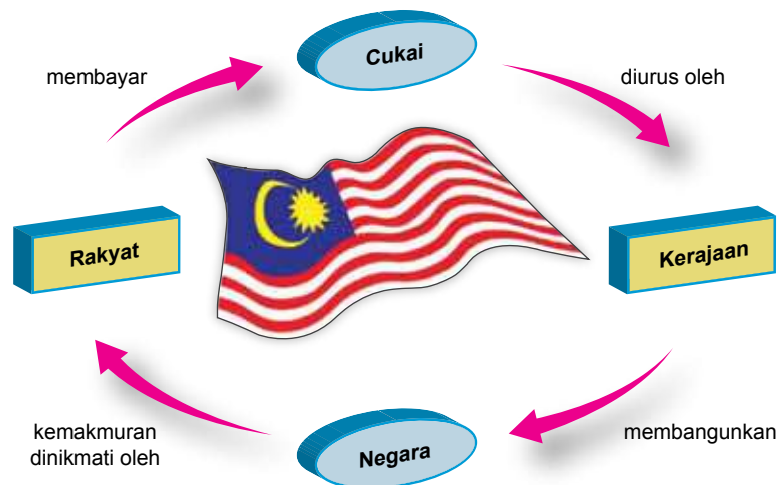
Pentadbiran sebuah negara ialah satu proses yang rumit dan memerlukan peruntukan yang besar. Cukai merupakan sumber kewangan yang utama bagi sesebuah kerajaan untuk mentadbir urus dan membangunkan negara. Sistem cukai yang optimum bukan sahaja berupaya menjadi hasil kerajaan malahan juga dapat meningkatkan kualiti hidup rakyat dan mendorong pelaburan swasta. Apakah cukai yang ada di Malaysia?

4.1 Percukaian



Apakah tujuan percukaian?

Percukaian ialah satu proses hasil (wang) dikumpul daripada individu atau syarikat untuk digunakan dalam pembangunan negara dengan menyediakan pelbagai kemudahan (misalnya pendidikan, kesihatan, keselamatan, kebajikan) demi kesejahteraan semua rakyat. Semua hasil cukai yang dikutip berdasarkan akta-akta yang diluluskan dalam parlimen.



Standard Pembelajaran

Menghuraikan tujuan percukaian.

Oh! Malaysiaku

Lembaga Hasil Dalam Negeri (LHDN) dan Jabatan Kastam Diraja masing-masing bertanggungjawab atas pungutan cukai langsung dan cukai tidak langsung di Malaysia. Kerajaan negeri pula bertanggungjawab atas pungutan hasil daripada perlombongan, tanah dan hutan, hasil daripada majlis perbandaran, perolehan daripada pemberian lesen kecuali yang dikutip oleh Kerajaan Persekutuan, dan sebagainya.

MOBILISASI MINDA 1

Berkumpulan

Tujuan: Menghuraikan tujuan percukaian.

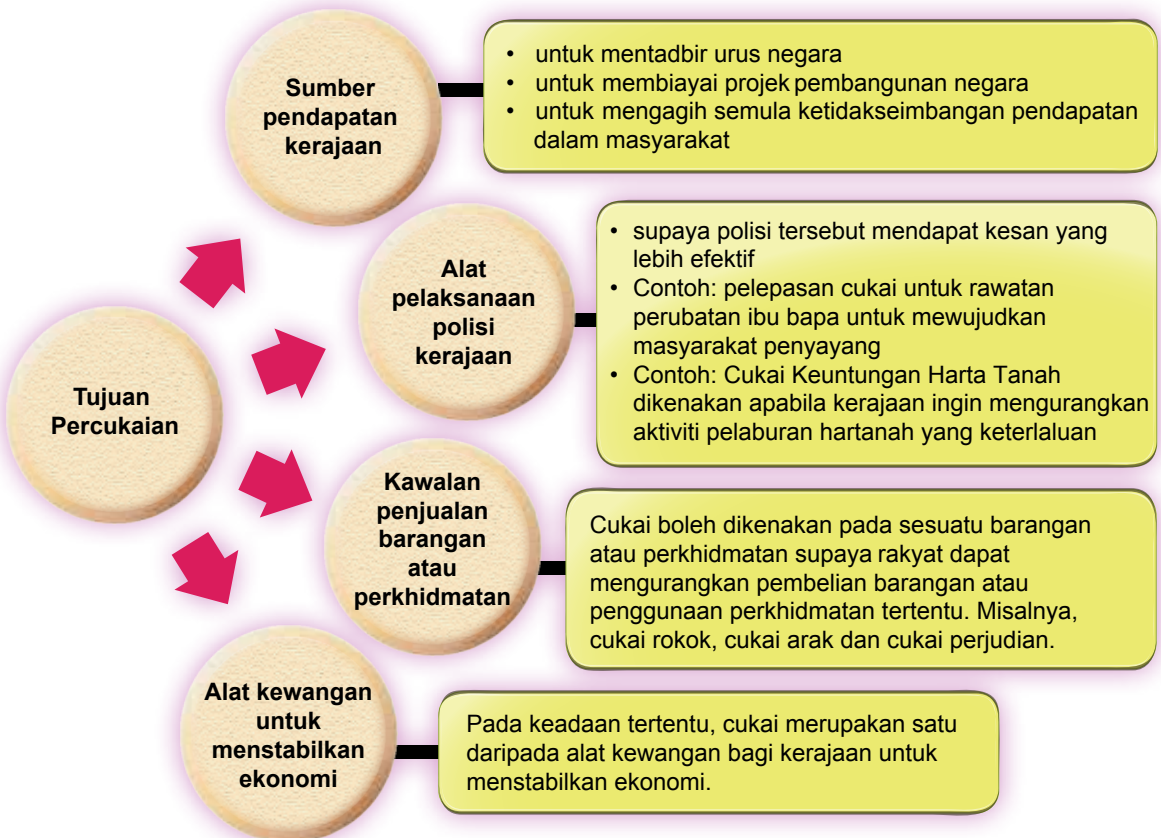
Langkah:

1. Bahagikan kelas kepada kumpulan 4 orang murid.
2. Setiap kumpulan melayari Internet berkaitan soalan-soalan berikut untuk mendapatkan maklumat yang lebih lanjut.
 - (a) Apakah tujuan percukaian?
 - (b) Huraikan 5 contoh penggunaan cukai oleh kerajaan.
3. Maklumat yang dikumpul dipersembahkan dalam peta pemikiran yang sesuai pada kertas sebak dan ditampal pada dinding kelas.
4. Murid memberikan komen tentang hasil kerja kumpulan lain dengan menampal nota lekit pada hasil kerja itu.

Perbincangan:

1. Bincangkan tujuan percukaian dan contoh penggunaan cukai oleh kerajaan.
2. Seterusnya, bincangkan tanggungjawab dan sikap seorang pembayar cukai yang bermoral dan beretika.

Tujuan percukaian boleh diringkaskan seperti dalam rajah di bawah.



Ke Mana Hasil Cukai Digunakan?



Pendidikan



Kesihatan



Kebajikan



Infrastruktur dan Kemudahan Awam



Pertanian dan Perindustrian



Keselamatan dan Pertahanan Negara



Pembangunan

Pembayaran cukai merupakan tanggungjawab rakyat yang wajib dilaksanakan. Rakyat perlu membayar cukai secara jujur dan mematuhi undang-undang supaya kerajaan tidak menanggung kerugian. Perancangan pembangunan negara akan terjejas jika negara kehilangan hasil cukai akibat sikap pembayar cukai yang tidak jujur dan tidak bertanggungjawab.

Medan Interaktif

Bagaimanakah kerajaan menggunakan cukai untuk menstabilkan ekonomi?

Latih Kendiri 4.1a

1. Apakah tujuan percukaian?
- 2.

RM91.8 juta CKHT dikutip setakat 9 Julai

KUALA LUMPUR: Kerajaan memperoleh RM91.868 juta menerusi kutipan Cukai Keuntungan Harta Tanah (CKHT) setakat 9 Julai lalu bagi aktiviti pelupusan hartanah untuk tempoh pegangan melebihi lima tahun.

Sumber: Berita Harian, 17 Julai 2019

Cukai Keuntungan Harta Tanah (CKHT) dikenakan bagi setiap keuntungan yang diperoleh menerusi jualan tanah atau hartanah dengan keadaan harga jual semula adalah lebih tinggi daripada harga belian. Apakah tujuan percukaian ini? Jelaskan jawapan anda.

Medan Interaktif

Siti telah bekerja sebagai kerani di sebuah syarikat selama 5 tahun. Dia beranggapan bahawa gajinya rendah dan tidak akan dikenakan cukai pendapatan. Dia tidak pernah melaporkan pendapatannya dan membayar cukai pendapatan.

Adakah Siti seorang warganegara yang bertanggungjawab? Jelaskan jawapan anda.

Apakah jenis-jenis cukai dan kesan pengelakan cukai tersebut dari aspek perundangan dan kewangan?

Standard Pembelajaran

Menghuraikan pelbagai cukai dan seterusnya kesan pengelakan cukai tersebut dari aspek perundangan dan kewangan.



Cukai Pendapatan

- Cukai yang dikenakan atas pendapatan yang diperoleh oleh seseorang individu bergaji atau sesebuah syarikat yang beroperasi di Malaysia.
- Setiap individu yang bergaji dan syarikat yang memperoleh keuntungan dikehendaki mendaftar sebagai pembayar cukai, mentaksirkan pendapatan tahunan dan membayar cukai pendapatan setiap tahun.
- Laporkan semua pendapatan, pengecualian, potongan, pelepasan dan rebat dengan mengemukakan Borang Nyata Cukai Pendapatan (BNCP) sama ada melalui borang ataupun secara elektronik melalui Internet (*ezHasil*).
- **Sistem Taksiran Sendiri** digunakan. Pembayar cukai perlu taksir sendiri, simpan rekod dan seterusnya membayar cukai pada amaun tertentu.

1. Taksir Sendiri (membuat sendiri pengiraan cukai pendapatan)

- Taksiran dilakukan untuk tahun sebelumnya, misalnya taksiran tahun 2019 dilakukan pada tahun 2020.
- Tarikh akhir penghantaran borang taksiran BNCP dan pembayaran cukai untuk individu tidak menjalankan perniagaan (borang BE) pada 30 April manakala individu yang menjalankan perniagaan (borang B) pada 30 Jun.

2. Simpan Rekod

- Semua dokumen seperti borang dan resit-resit asal perlu disimpan selama 7 tahun.

3. Bayar

- Pembayaran cukai boleh dibuat secara sekali gus kepada Lembaga Hasil Dalam Negeri (LHDN) ataupun melalui potongan cukai bulanan (PCB).

Pihak yang mengutip?

- Lembaga Hasil Dalam Negeri (LHDN).

Kesan pengelakan cukai

Pengelakan cukai	Hukuman	Perundangan
Tidak memaklumkan layak dikenakan cukai	Boleh didenda RM200 hingga RM20 000 atau dipenjarakan tidak melebihi 6 bulan atau kedua-duanya	Akta Cukai Pendapatan 1967 (Akta 53) Seksyen 112(1)
Tidak melaporkan pendapatan sebenar di dalam BNCP	Boleh didenda RM1 000 hingga RM10 000 dan penalti 200% atas cukai berkurangan lapor	Akta Cukai Pendapatan 1967 (Akta 53) Seksyen 113(1)(a)
Memberikan maklumat tidak tepat mengenai tanggungan cukai sendiri atau orang lain	Boleh didenda RM1 000 hingga RM10 000 dan penalti 200% atas cukai berkurangan lapor	Akta Cukai Pendapatan 1967 (Akta 53) Seksyen 113(1)(b)
Sengaja mengelak cukai atau membantu orang lain mengelak cukai	Boleh didenda RM1 000 hingga RM20 000 atau dipenjarakan tidak melebihi 3 tahun atau kedua-duanya dan penalti 300% atas cukai berkurangan lapor	Akta Cukai Pendapatan 1967 (Akta 53) Seksyen 114(1)

* Tertakluk kepada perubahan dari semasa ke semasa.
(Sumber: bit.do/AktaCukaiPendapatan) (Dicapai pada 14 September 2020)



Cukai Jalan

- Cukai yang dikenakan terhadap pengguna jalan raya yang memiliki kenderaan termasuk motosikal dan kereta.
- Pemilik kenderaan perlu membayar cukai jalan sebelum tarikh tamat tempoh cukai jalan. Tarikh tersebut tercetak di atas resit cukai jalan (Lesen Kenderaan Motor) yang wajib dilekatkan atau ditunjukkan pada kenderaan.
- Kenderaan yang cukai jalan telah tamat tempoh lebih daripada setahun perlu dihantar ke Puspakom untuk diperiksa. Laporan pemeriksaan Puspakom dan bayaran cukai perlu dihantar ke Jabatan Pengangkutan Jalan (JPJ) untuk mengaktifkan balik cukai jalan.
- Sekiranya cukai jalan tidak dibayar, kenderaan itu tidak dibenarkan untuk berada di atas jalan raya.

Pihak yang mengutip?

- Jabatan Pengangkutan Jalan (JPJ).

Kesan pengelakan cukai

Pengelakan cukai	Hukuman	Perundangan
Menggunakan kenderaan tanpa membayar cukai jalan yang sah	Boleh didenda tidak melebihi RM2 000	Akta Pengangkutan Jalan 1987 (Akta 333) Seksyen 23(1)

* Tertakluk kepada perubahan dari semasa ke semasa.
(Sumber: bit.do/AktaPengangkutanJalan) (Dicapai pada 14 September 2020)

Buletin Ilmiah

Contoh Lesen Kenderaan Motor (LKM)





Cukai Pintu

- Cukai yang dikenakan kepada semua pegangan atau harta tanah (rumah kediaman, perindustrian, bangunan komersial dan tanah kosong) untuk membiayai kos penyelenggaraan bandar seperti mengangkut sampah, membersihkan longkang dan sebagainya.
- Cukai ini juga dikenali sebagai cukai taksiran.

Pihak yang mengutip?

- Pihak berkuasa tempatan iaitu majlis perbandaran atau majlis daerah.

Kesan pengelakan cukai

Pengelakan cukai	Tindakan	Perundangan
Bayaran cukai tidak dijelaskan dalam tempoh yang ditetapkan (tunggakan)	Notis dalam Borang E akan dikeluarkan	Akta Kerajaan Tempatan 1976 (Akta 171) Seksyen 147 dan 148
Masih gagal menjelaskan tunggakan dalam tempoh 15 hari selepas notis diserahkan	Waran tahanan dalam Borang F akan dikeluarkan dan harta mudah alih boleh disita	Akta Kerajaan Tempatan 1976 (Akta 171) Seksyen 147 dan 148

* Tertakluk kepada perubahan dari semasa ke semasa.

(Sumber: bit.do/AktaKerajaanTempatan) (Dicapai pada 14 September 2020)

Buletin Ilmiah

Waran tahanan ialah surat kuasa yang membolehkan pihak berkuasa tempatan menyita barang-barang yang ada di dalam bangunan melalui Pendaftar Mahkamah Tinggi mengikut Seksyen 151.



Cukai Tanah

- Cukai yang dikenakan terhadap pemilik tanah pertanian, tanah perusahaan dan tanah bangunan.
- Cukai ini ditafsirkan sebagai sewa bawah Seksyen 5 Kanun Tanah Negara 1965.

Pihak yang mengutip?

- Pihak berkuasa negeri iaitu Pejabat Tanah dan Galian.

Kesan pengelakan cukai

Pengelakan cukai	Tindakan	Perundangan
Bayaran cukai tidak dijelaskan dalam tempoh yang ditetapkan	Notis tuntutan dalam Borang 6A akan dikeluarkan	Kanun Tanah Negara 1965 Seksyen 97
Masih gagal menjelaskan jumlah dituntut dalam tempoh dinyatakan dalam notis tuntutan	Tanah boleh dirampas atau dilucuthak	Kanun Tanah Negara 1965 Seksyen 100

* Tertakluk kepada perubahan dari semasa ke semasa.

(Sumber: tanahweb.wordpress.com/ktn/) (Dicapai pada 14 September 2020)

Buletin Ilmiah

Cukai petak merupakan cukai yang dikenakan kepada hak milik strata (misalnya pangsapuri dan kondominium) bagi menggantikan cukai tanah.



Cukai Jualan dan Perkhidmatan

- Cukai Jualan dan Perkhidmatan mula dikuatkuasakan pada 1 September 2018, terdiri daripada dua jenis iaitu cukai jualan dan cukai perkhidmatan.
- Cukai jualan merupakan cukai yang dikenakan sekali sahaja atas pelbagai barangan bercukai pada peringkat pengeluaran atau pengimportan.
- Cukai perkhidmatan ialah cukai yang dikenakan terhadap pengguna yang menggunakan perkhidmatan bercukai tertentu seperti perkhidmatan hotel, insurans dan takaful, penyediaan makanan dan minuman, telekomunikasi, kad kredit dan sebagainya.
- Pengeluar atau pengimport dengan nilai jualan barangan bercukai melebihi RM500 000 setahun perlu didaftarkan bawah Akta Cukai Jualan 2018.
- Pembekal perkhidmatan dengan nilai perkhidmatan bercukai yang disediakan melebihi nilai ambang RM500 000 setahun dan pembekal perkhidmatan penyediaan makanan dan minuman dengan nilai perkhidmatan bercukai yang disediakan melebihi nilai ambang RM1 500 000 setahun, perlu didaftarkan bawah Akta Cukai Perkhidmatan 2018.
- Pengutipan cukai ialah tanggungjawab pembekal perkhidmatan bagi pihak kerajaan. Cukai perkhidmatan perlu dikutip daripada pelanggan iaitu penerima perkhidmatan. Cukai perkhidmatan yang dikutip oleh pembekal perkhidmatan akan dibayar kepada kerajaan dalam tempoh masa tertentu.

Imbas kod QR atau layari laman sesawang berikut:



senarai barang bercukai
bit.do/BarangBercukai



senarai perkhidmatan bercukai
bit.do/PerkhidmatanBercukai

Buletin Ilmiah

Cukai jualan dan perkhidmatan tidak dikenakan di wilayah bebas cukai antaranya Pulau Langkawi dan Pengkalan Kubor, Kelantan.

* Tertakluk kepada perubahan

Buletin Ilmiah

Nilai ambang ialah nilai pusingan tahunan seseorang yang menentukan tanggungan untuk didaftarkan bawah Akta Cukai Jualan dan Perkhidmatan.
(Sumber: bit.do/NilaiAmbang) (Dicapai pada 17 Julai 2020)

Pihak yang mengutip?

- Jabatan Kastam Diraja Malaysia (JKDM).

Kesan pengelakan cukai

Pengelakan cukai	Hukuman	Perundangan
Sengaja mengelak cukai atau membantu orang lain mengelak cukai	Kesalahan pertama: boleh didenda 10 kali ganda hingga 20 kali ganda amaun cukai jualan atau dipenjarakan tidak melebihi 5 tahun atau kedua-duanya	Akta Cukai Jualan 2018 (Akta 806) Seksyen 86(1) dan 86(2)
	Kesalahan kedua atau berikutnya: boleh didenda 20 kali ganda hingga 40 kali ganda amaun cukai jualan atau dipenjarakan tidak melebihi 7 tahun atau kedua-duanya	
Amaun cukai yang dielakkan tidak dapat ditentukan	Boleh didenda RM50 000 hingga RM500 000 atau dipenjarakan tidak melebihi 7 tahun atau kedua-duanya	Akta Cukai Jualan 2018 (Akta 806) Seksyen 86(3)
Pihak yang membantu dalam penyediaan penyata cukai yang kurang benar	Boleh didenda RM2 000 hingga RM20 000 atau dipenjarakan tidak melebihi 3 tahun atau kedua-duanya	Akta Cukai Jualan 2018 (Akta 806) Seksyen 86(4)
Hukuman sama digariskan dalam Akta Cukai Perkhidmatan 2018 (Akta 807) Seksyen 71		

* Tertakluk kepada perubahan dari semasa ke semasa.

(Sumber: bit.do/AktaCukaiJualan)

(Sumber: bit.do/AktaCukaiPerkhidmatan)

(Dicapai pada 14 September 2020)

Latih Kendiri 4.1b

1. Jelaskan maksud cukai pintu.

2. Encik Tan mempunyai sebuah kereta. Cukai jalan kereta itu sudah tamat tempoh pada 7 Jun 2019. Dia terlupa untuk memperbaharui cukai jalan.

Huraikan kesan jika Encik Tan masih memandu kereta itu.

3. Huraikan pihak yang perlu berdaftar bawah Akta Cukai Jualan 2018.

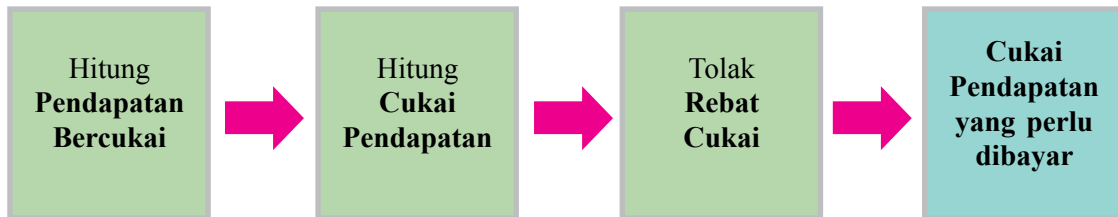
4. Apakah perbezaan antara cukai tanah dengan cukai pintu?

Cukai tanah	Cukai pintu

5. Apakah kesan jika seseorang sengaja mengelakkan cukai pendapatan?

📌 Bagaimanakah mengira cukai pendapatan?

Cukai pendapatan yang perlu dibayar oleh seseorang individu dapat dikira melalui proses pengiraan seperti carta alir berikut.



Standard Pembelajaran

Mengkaji, mentafsir dan membuat pengiraan yang melibatkan pelbagai cukai.

Pendapatan Bercukai

Cukai pendapatan individu yang perlu dibayar dikira berdasarkan **pendapatan bercukai**. Pendapatan bercukai boleh diperoleh dengan menggunakan persamaan seperti di bawah.

$$\text{Pendapatan bercukai} = \frac{\text{jumlah pendapatan tahunan}}{\text{tahunan}} - \frac{\text{pengecualian cukai}}{\text{cukai}} - \frac{\text{pelepasan cukai}}{\text{cukai}}$$

(A) Jumlah Pendapatan Tahunan

Jumlah pendapatan tahunan termasuk segala bentuk upah, gaji, bonus, dividen, faedah, sewa, royalti, premium dan sebagainya. Namun, tidak semua pendapatan yang diterima daripada majikan perlu dikenakan cukai, contohnya elaun petrol atau perjalanan, subsidi-subsidi majikan seperti perumahan dan kenderaan, manfaat perubatan, Elaun Bantuan Sara Hidup (COLA), keraian dan lain-lain.

(B) Pengecualian Cukai

Pengecualian cukai merujuk kepada semua perbelanjaan peribadi dalam bentuk hadiah, derma, sumbangan kepada kerajaan atau pelbagai organisasi, contohnya perpustakaan negeri dan badan rawatan kesihatan.

Perbelanjaan tersebut boleh dikecualikan cukai tetapi tertakluk kepada had tertentu. Pengecualian cukai ini bertujuan untuk meningkatkan perkembangan kebudayaan, kesenian dan juga memupuk masyarakat penyayang.

Buletin Ilmiah

Cukai pendapatan merupakan sejenis cukai progresif yang mana kadar cukai semakin tinggi apabila pendapatan bertambah.

Buletin Ilmiah

Contoh Penyata Saraan daripada Penggajian



bit.do/PenyataSaraan

Buletin Ilmiah

Mulai tahun 2015, individu yang mempunyai pendapatan penggajian tahunan melebihi RM34 000 (selepas potongan KWSP) perlu mendaftar fail cukai pendapatan.
(Sumber: Lembaga Hasil Dalam Negeri Malaysia)

(C) Pelepasan Cukai

Pelepasan cukai merujuk kepada perkara atau perbelanjaan bagi kepentingan persendirian atau ahli-ahli keluarga yang tidak dikenakan cukai pendapatan, antaranya caruman Kumpulan Wang Simpanan Pekerja (KWSP), rawatan perubatan dan yuran pengajian. Jenis pelepasan cukai bergantung kepada dasar yang ditetapkan oleh kerajaan dan boleh berubah setiap tahun.

Imbas kod QR atau layari bit.do/PelepasanCukai untuk melihat pelepasan cukai pendapatan yang lengkap.



Cukai Pendapatan

Selepas pendapatan bercukai diperoleh, cukai pendapatan boleh ditentukan dengan merujuk jadual kadar cukai. **Kadar cukai** ditetapkan oleh kerajaan dan boleh berubah mengikut polisi kerajaan pada belanjawan tahunan. Jadual di bawah ialah kadar cukai pendapatan individu untuk Tahun Taksiran 2020.

Jadual: Kadar Cukai Pendapatan Individu untuk Tahun Taksiran 2020

Banjaran Pendapatan Bercukai (RM)	Pengiraan (RM)	Kadar (%)	Cukai (RM)
0 - 5 000	5 000 pertama	0	0
5 001 - 20 000	5 000 pertama 15 000 berikutnya	1	0 150
20 001 - 35 000	20 000 pertama 15 000 berikutnya	3	150 450
35 001 - 50 000	35 000 pertama 15 000 berikutnya	8	600 1 200
50 001 - 70 000	50 000 pertama 20 000 berikutnya	14	1 800 2 800
70 001 - 100 000	70 000 pertama 30 000 berikutnya	21	4 600 6 300
100 001 - 250 000	100 000 pertama 150 000 berikutnya	24	10 900 36 000
250 001 - 400 000	250 000 pertama 150 000 berikutnya	24.5	46 900 36 750
400 001 - 600 000	400 000 pertama 200 000 berikutnya	25	83 650 50 000
600 001 - 1 000 000	600 000 pertama 400 000 berikutnya	26	133 650 104 000
1 000 001 - 2 000 000	1 000 000 pertama 1 000 000 berikutnya	28	237 650 280 000
Melebihi 2 000 000	2 000 000 pertama Setiap ringgit berikutnya	30	517 650 ...

* Tertakluk kepada perubahan dari semasa ke semasa.

(Sumber: Portal Rasmi Lembaga Hasil Dalam Negeri Malaysia)

Rebat Cukai

Rebat cukai diberikan untuk mengurangkan cukai yang perlu dibayar. Terdapat 2 jenis rebat cukai, iaitu:

- Rebat cukai sebanyak RM400 akan diberikan kepada pembayar cukai sekiranya pendapatan bercukainya tidak melebihi RM35 000, tertakluk kepada perubahan semasa.
- Jumlah bayaran zakat atau fitrah oleh warganegara yang beragama Islam akan mendapat rebat cukai.

Buletin Ilmiah

Zakat bererti bersih, suci atau berkat. Zakat bermaksud mengeluarkan sebahagian harta untuk diagihkan kepada golongan tertentu (seperti fakir miskin), mengikut syarat-syarat tertentu.

Contoh 1

Encik Khairul memperoleh pendapatan tahunan sebanyak RM125 300 termasuk elaun. Diberi bahawa elaun-elaun berjumlah RM12 340 adalah dikecualikan cukai. Pada masa yang sama, dia memberi derma kepada perpustakaan berjumlah RM2 000. Jumlah pelepasannya pula ialah RM22 500. Hitung pendapatan bercukai Encik Khairul.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{Jumlah pendapatan tahunan} \\ &= \text{RM125 300} - \text{RM12 340} \\ &= \text{RM112 960} \end{aligned}$$

Pendapatan tahunan perlu ditolak dengan elaun-elaun yang dikecualikan cukai

Pendapatan bercukai

$$\begin{aligned} &= \text{jumlah pendapatan tahunan} - \text{pengecualian cukai} - \text{pelepasan cukai} \\ &= \text{RM112 960} - \text{RM2 000} - \text{RM22 500} \\ &= \text{RM88 460} \end{aligned}$$

Pengecualian termasuk derma perpustakaan sebanyak RM2 000

Contoh 2

Asraf mempunyai pendapatan bercukai sebanyak RM47 531 pada tahun 2020. Dia telah membayar zakat berjumlah RM280 pada tahun tersebut. Hitung cukai pendapatan yang perlu dibayar oleh Asraf bagi tahun tersebut.

Penyelesaian:

Pendapatan bercukai Asraf, RM47 531 terletak pada banjaran pendapatan bercukai seperti di bawah.

Banjaran Pendapatan Bercukai (RM)	Pengiraan (RM)	Kadar (%)	Cukai (RM)
35 001 - 50 000	35 000 pertama 15 000 berikutnya	8	600 1 200

$$\text{Cukai bagi RM35 000 pertama} = \text{RM600} \quad \leftarrow \text{Cukai dasar}$$

$$\begin{aligned} \text{Cukai atas baki berikutnya} &= (\text{RM47 531} - \text{RM35 000}) \times 8\% \\ &= \text{RM1 002.48} \end{aligned}$$

$$\text{Rebat yang layak (zakat)} = \text{RM280}$$

$$\begin{aligned} \text{Cukai pendapatan} &= \text{RM600} + \text{RM1 002.48} - \text{RM280} \\ &= \text{RM1 322.48} \end{aligned}$$

Cukai pendapatan = cukai dasar + cukai atas baki – rebat cukai

Buletin Ilmiah

Kadar cukai pendapatan syarikat untuk Tahun Taksiran 2019:

Syarikat dengan modal berbayar tidak melebihi RM2.5 juta.	
(i) RM500 000 yang pertama	17%
(ii) Baki seterusnya	24%
Syarikat dengan modal berbayar melebihi RM2.5 juta.	24%

Contoh 3

Encik Chan mempunyai jumlah pendapatan tahunan sebanyak RM52 770 pada tahun 2020. Beliau telah mendermakan RM300 kepada sebuah badan kebajikan yang diluluskan oleh kerajaan. Jadual di bawah menunjukkan pelepasan cukai yang dituntutnya.

Pelepasan cukai	Amaun (RM)
Individu	9 000
Insurans hayat dan KWSP (had RM7 000)	5 800
Insurans perubatan (had RM3 000)	1 700
Yuran pengajian sendiri (had RM7 000)	4 000

Hitung cukai pendapatan yang perlu dibayar oleh Encik Chan bagi tahun tersebut dengan mengambil kira rebat cukai sekiranya layak.

Penyelesaian:

Pendapatan bercukai

$$\begin{aligned}
 &= \text{jumlah pendapatan} - \text{pengecualian cukai} - \text{pelepasan cukai} \\
 &= \text{RM52 770} - \text{RM300} - (\text{RM9 000} + \text{RM5 800} + \text{RM1 700} \\
 &\quad + \text{RM4 000}) \\
 &= \text{RM31 970}
 \end{aligned}$$

Pendapatan bercukai Encik Chan, RM31 970 terletak pada banjaran pendapatan bercukai seperti di bawah.

Banjaran Pendapatan Bercukai (RM)	Pengiraan (RM)	Kadar (%)	Cukai (RM)
20 001 - 35 000	20 000 pertama 15 000 berikutnya	3	150 450

Cukai bagi RM20 000 pertama = RM150

$$\begin{aligned}
 \text{Cukai atas baki berikutnya} &= (\text{RM31 970} - \text{RM20 000}) \times 3\% \\
 &= \text{RM359.10}
 \end{aligned}$$

Rebat yang layak = RM400 ← Rebate RM400 kerana pendapatan bercukai $\leq$ RM35 000

$$\begin{aligned}
 \text{Cukai pendapatan yang perlu dibayar} &= \text{RM150} + \text{RM359.10} - \text{RM400} \\
 &= \text{RM109.10}
 \end{aligned}$$



Apakah potongan cukai bulanan (PCB) dan pengiraan yang terlibat?

Potongan Cukai Bulanan (PCB) ialah potongan pendapatan (saraan) pekerja untuk bayaran cukai pendapatan tahun semasa. Jumlah potongan berdasarkan Jadual Potongan Cukai Bulanan atau Kaedah Pengiraan Berkomputer PCB yang disediakan oleh Lembaga Hasil Dalam Negeri (LHDN).

Buletin Ilmiah

Seseorang individu tidak perlu membuat taksiran pada tahun pertama bekerja kerana dia tidak perlu membayar cukai pendapatan. Namun, dia dinasihati untuk mendaftarkan fail cukai pendapatan LHDN kerana dia mungkin akan mengalami peningkatan gaji pada tahun-tahun berikutnya.

Medan Interaktif
 Apakah perbezaan antara pelepasan cukai dengan rebat cukai?

Buletin Ilmiah

Saraan bulanan minimum layak PCB (selepas tolak KWSP) untuk individu bujang ialah RM2 851 manakala individu berkahwin dan pasangan tidak bekerja ialah RM3 851.

* Tertakluk kepada perubahan

Pembayar cukai perlu membuat perbandingan antara jumlah PCB yang telah dipotong dengan cukai yang perlu dibayar seperti yang ditunjukkan di bawah.

- Cukai yang perlu dibayar $>$ PCB
Cukai – PCB = Bayaran cukai yang tidak mencukupi
Bayaran cukai yang tidak mencukupi perlu dijelaskan kepada LHDN
- Cukai yang perlu dibayar $<$ PCB
PCB – Cukai = Lebihan potongan
Lebihan potongan PCB akan dipulangkan oleh LHDN ke dalam akaun bank pembayar cukai

Contoh 4

Gaji tahunan Encik Lim ialah RM74 000 pada tahun 2020. Dia menuntut pelepasan individu sebanyak RM9 000, insurans hayat dan KWSP sebanyak RM7 000, insurans perubatan sebanyak RM1 325 dan perbelanjaan rawatan perubatan ibu sebanyak RM1 250. Dia juga telah mendermakan RM1 000 kepada pusat kebajikan yang diluluskan. Setiap bulan gajinya dipotong sebanyak RM180 untuk potongan cukai bulanan (PCB).

- Hitung cukai pendapatan yang perlu dibayar bagi tahun tersebut.
- Adakah Encik Lim perlu membuat bayaran baki cukai pendapatan? Jelaskan jawapan anda.

Penyelesaian:

- $$\begin{aligned}\text{Pendapatan bercukai} &= \text{jumlah pendapatan} - \text{pengecualian cukai} - \text{pelepasan cukai} \\ &= \text{RM74 000} - \text{RM1 000} - (\text{RM9 000} + \text{RM7 000} + \text{RM1 325} \\ &\quad + \text{RM1 250}) \\ &= \text{RM54 425}\end{aligned}$$

Pendapatan bercukai Encik Lim, RM54 425 terletak pada banjaran pendapatan bercukai seperti di bawah.

Banjaran Pendapatan Bercukai (RM)	Pengiraan (RM)	Kadar (%)	Cukai (RM)
50 001 - 70 000	50 000 pertama 20 000 berikutnya	14	1 800 2 800

Cukai bagi RM50 000 pertama = RM1 800

Cukai atas baki berikutnya = $(\text{RM54 425} - \text{RM50 000}) \times 14\%$
= RM619.50

Rebat yang layak = RM0 $\leftarrow$ Rebat RM0 kerana pendapatan bercukai $>$ RM35 000

Cukai pendapatan yang perlu dibayar = RM1 800 + RM619.50 – RM0
= RM2 419.50

- $$\begin{aligned}\text{Jumlah PCB yang dipotong} &= \text{RM180} \times 12 \\ &= \text{RM2 160} \leftarrow \text{Terkurang bayar}\end{aligned}$$

Cukai yang perlu dibayar $>$ PCB. Jadi, bayaran cukai yang tidak mencukupi perlu dibuat.
Bayaran cukai yang tidak mencukupi = RM2 419.50 – RM2 160
= RM259.50

Encik Lim perlu membuat bayaran sebanyak RM259.50 kepada LHDN kerana jumlah PCB yang dipotong tidak mencukupi untuk cukai pendapatan yang perlu dibayarnya.

Apakah taksiran cukai bersama dan taksiran cukai berasingan serta pengiraan yang terlibat?

Untuk individu yang telah berkahwin, sistem taksiran cukai pendapatan membenarkan taksiran dibuat mengikut satu daripada jenis taksiran di bawah:

Taksiran cukai bersama

Taksiran yang dikeluarkan oleh suami (atau isteri). Pendapatan isteri (atau suami) akan dijumlahkan dengan pendapatan suami (atau isteri) semasa membuat taksiran.

Taksiran cukai berasingan

Suami dan isteri masing-masing membuat taksiran secara berasingan.

Buletin Ilmiah

Syarat-syarat membuat taksiran cukai bersama:

- Suami dan isteri perlu tinggal bersama
- Mempunyai jumlah pendapatan untuk diagregatkan dengan jumlah pendapatan suami/isteri
- Suami/isteri yang memilih taksiran bersama mesti warganegara Malaysia jika tidak bermastautin
- Hanya boleh dibuat dengan seorang isteri sahaja

Secara umumnya, sekiranya kedua-dua orang suami dan isteri mempunyai pendapatan berasingan, taksiran cukai bersama boleh menyebabkan jumlah pelepasan menjadi berkurang. Hal ini kerana kebanyakan pelepasan mempunyai had tuntutan, tanpa mengambil kira sama ada taksiran cukai bersama atau berasingan. Hal ini boleh menyebabkan pembayaran cukai meningkat dengan banyak sekali.

Contoh 5

Pada tahun 2020, Encik Rajan dan isterinya mendapat gaji tahunan sebanyak RM53 000 dan RM57 000. Mereka masing-masing telah mendermakan RM500 kepada badan kebajikan yang diluluskan oleh kerajaan pada tahun tersebut. Berikut ialah pelepasan yang hendak dituntut oleh Encik Rajan dan isterinya.

Perkara	Encik Rajan	Isteri
Individu	RM9 000	RM9 000
Gaya hidup (had RM2 500)	RM2 500	RM2 700
Insurans hayat (had RM7 000)	RM5 830	RM6 000
Insurans perubatan (had RM3 000)	RM2 650	RM2 570

- Hitung jumlah cukai pendapatan bagi Encik Rajan dan isterinya dengan menggunakan cara taksiran cukai bersama dan taksiran cukai berasingan.
- Antara taksiran cukai bersama dan taksiran cukai berasingan, yang manakah lebih sesuai digunakan oleh Encik Rajan dan isterinya? Jelaskan jawapan anda.

Penyelesaian:

- (a) Jadual berikut menunjukkan jumlah cukai pendapatan Encik Rajan dan isterinya bagi taksiran cukai bersama dan taksiran cukai berasingan.

Perkara	Taksiran Cukai Bersama	Taksiran Cukai Berasingan	
	Suami dan Isteri	Suami	Isteri
Jumlah pendapatan	RM53 000 + RM57 000 = RM110 000	RM 53 000	RM 57 000
Jumlah pengecualian (Derma)	– RM 1 000	– RM 500	– RM 500
Pelepasan			
– Individu	– RM 9 000	– RM 9 000	– RM 9 000
– Gaya hidup (had RM2 500)	– RM 2 500	– RM 2 500	– RM 2 500
– Insurans hayat (had RM7 000)	– RM 7 000	– RM 5 830	– RM 6 000
– Insurans perubatan (had RM3 000)	– RM 3 000	– RM 2 650	– RM 2 570
Pendapatan bercukai	RM 87 500	RM 32 520	RM 36 430
Cukai dasar	RM 4 600	RM 150	RM 600
Cukai atas baki	Baki = 87 500 – 70 000 = 17 500 RM17 500 × 21% = RM3 675.00	Baki = 32 520 – 20 000 = 12 520 RM12 520 × 3% = RM375.60	Baki = 36 430 – 35 000 = 1 430 RM1 430 × 8% = RM114.40
Rebat cukai	– RM 0	– RM 400 (Pendapatan bercukai ≤ RM35 000)	– RM 0
Cukai pendapatan yang perlu dibayar	RM4 600 + RM3 675 – RM0 = RM8 275	RM150 + RM375.60 – RM400 = RM125.60	RM600 + RM114.40 – RM0 = RM714.40
		RM840	

Pelepasan yang layak dituntut ialah RM2 500 walaupun berbelanja RM2 700

- (b) Taksiran cukai berasingan lebih sesuai digunakan kerana cukai pendapatan yang perlu dibayar jauh lebih rendah, iaitu RM840 berbanding dengan RM8 275 melalui taksiran cukai bersama.

TiP Bestari

Walaupun taksiran dibuat bersama, had tuntutan pelepasan tetap dikira sekali sahaja.

Bagaimanakah mengira cukai jalan?

Cukai jalan yang dikenakan adalah berdasarkan kapasiti enjin kenderaan yang digunakan oleh pemiliknya. Pada kebiasaannya, cukai jalan akan lebih tinggi bagi kenderaan yang lebih tinggi kapasiti enjinnya.

Contoh 6

Jadual di bawah menunjukkan kadar cukai jalan motosikal di Sabah dan Sarawak.

Kapasiti Enjin	Kadar Cukai Jalan	
	Kadar Asas	Kadar Progresif
151 cc - 200 cc	RM 9.00	-
201 cc - 250 cc	RM 12.00	-
251 cc - 500 cc	RM 30.00	-

Encik Chong memiliki sebuah motosikal kegunaan persendirian di Sarawak dengan kapasiti enjin 260 cc. Hitung cukai jalan untuk motosikalnya.

Penyelesaian:

Cukai jalan motosikal (260 cc) = RM30

Contoh 7

Jadual di bawah menunjukkan kadar cukai jalan kereta persendirian di Semenanjung Malaysia.

Kapasiti Enjin	Kadar Cukai Jalan	
	Kadar Asas	Kadar Progresif
1 000 cc dan ke bawah	RM 20.00	-
1 001 cc - 1 200 cc	RM 55.00	-
1 201 cc - 1 400 cc	RM 70.00	-
1 401 cc - 1 600 cc	RM 90.00	-
1 601 cc - 1 800 cc	RM 200.00	+ RM 0.40 setiap cc melebihi 1 600 cc
1 801 cc - 2 000 cc	RM 280.00	+ RM 0.50 setiap cc melebihi 1 800 cc

Alan memiliki dua buah kereta kegunaan persendirian di Melaka dengan kapasiti enjin masing-masing ialah 859 cc dan 1 997 cc. Hitung cukai jalan untuk kedua-dua keretanya.

Penyelesaian:

Cukai jalan kereta (859 cc) = RM20.00

Cukai jalan kereta (1 997 cc)

= RM280.00 + (1 997 - 1 800) × RM0.50

= RM280.00 + 197 × RM0.50

= RM280.00 + RM98.50

= RM378.50

Kereta dengan kapasiti enjin 1 801 cc hingga 2 000 cc dikenakan kadar asas RM280 dan kadar progresif RM0.50 setiap cc melebihi 1 800 cc

Imbas kod QR atau layari bit.do/CukaiJalan untuk melihat kadar cukai jalan Malaysia.



Bagaimanakah mengira cukai pintu?

Kadar **cukai pintu** ditetapkan oleh pihak berkuasa tempatan berdasarkan lokasi dan jenis hartanah. Jumlah cukai yang perlu dibayar setiap tahun bergantung pada kadar cukai yang dikenakan atas nilai tahunan.

Buletin Ilmiah

Nilai tahunan
= anggaran sewa bulanan
× 12 bulan

$$\text{Jumlah cukai pintu} = \text{kadar cukai pintu} \times \text{nilai tahunan}$$

Nilai tahunan (atau **taksiran tahunan**) merupakan anggaran kasar sewa tahunan yang munasabah dan dijangka akan diperoleh dalam setahun daripada pegangan tertentu jika disewakan.

Contoh 8

Mariani memiliki sebuah rumah kediaman di Subang Jaya. Dia menerima bil cukai pintu daripada Majlis Perbandaran Subang Jaya. Diberi bahawa nilai tahunan ialah RM6 580 dan kadar cukai pintu ialah 5%. Hitung cukai pintu yang perlu dibayar oleh Mariani untuk setiap setengah tahun.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\text{Jumlah cukai pintu} &= \text{kadar cukai pintu} \times \text{nilai tahunan} \\ &= 5\% \times \text{RM6 580} \\ &= \text{RM329 setahun}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cukai pintu setiap setengah tahun} &= \frac{\text{RM329}}{2} \\ &= \text{RM164.50 setiap setengah tahun}\end{aligned}$$

Bagaimanakah mengira cukai tanah?

Kadar **cukai tanah** ditetapkan oleh kerajaan negeri berdasarkan lokasi, saiz dan jenis tanah. Jumlah cukai yang perlu dibayar setiap tahun bergantung pada kadar cukai tanah setiap unit keluasan atas jumlah keluasan tanah yang dimiliki.

$$\text{Jumlah cukai tanah} = \text{kadar cukai tanah setiap unit keluasan} \times \text{jumlah keluasan tanah}$$

Contoh 9

Encik Hamid memiliki sebuah rumah berkeluasan 130 m². Diberi bahawa kadar cukai tanah yang dikenakan ialah RM0.43 setiap meter persegi. Hitung jumlah cukai tanah yang perlu dibayar oleh Encik Hamid setiap tahun.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\text{Jumlah cukai tanah} &= \text{kadar cukai tanah setiap unit keluasan} \times \text{jumlah keluasan tanah} \\ &= \text{RM0.43} \times 130 \\ &= \text{RM55.90 setahun}\end{aligned}$$

Bagaimanakah mengira cukai jualan dan perkhidmatan?

Kadar **cukai jualan** untuk barangan adalah berbeza, iaitu 5%, 10% atau kadar-kadar lain bergantung pada barangan yang ditetapkan manakala kadar **cukai perkhidmatan** ialah 6%.

Buletin Ilmiah

Cukai perkhidmatan bagi setiap kad kredit ialah RM25 setahun.

Contoh 10

Sofia menyewa sebuah bilik di Hotel Selesa dengan harga RM240 semalam. Sofia menginap di hotel itu untuk dua malam. Diberi bahawa hotel itu mengenakan cukai perkhidmatan sebanyak 6%. Hitung cukai perkhidmatan yang perlu dibayar oleh Sofia.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\text{Cukai perkhidmatan} &= \text{RM}240 \times 2 \times 6\% \\ &= \text{RM}28.80\end{aligned}$$

Latih Kendiri 4.1c

1. Hitung pendapatan bercukai berdasarkan maklumat-maklumat yang diberi.

- (a) Jumlah pendapatan RM89 340

Pengecualian cukai	RM 2 500
Pelepasan cukai	RM11 000

- (b) Jumlah pendapatan RM 76 000

Pengecualian cukai	RM 8 250
Pelepasan cukai	RM 15 340

- (c) Jumlah pendapatan RM68 210

Pelepasan	
Individu	RM9 000
Insurans hayat dan KWSP (had RM7 000)	RM6 250
Insurans perubatan (had RM3 000)	RM3 600

- (d) Jumlah pendapatan RM113 421

Pelepasan	
Individu	RM 9 000
Insurans hayat dan KWSP (had RM7 000)	RM 11 420
Insurans pendidikan (had RM3 000)	RM 2 400

2. Hitung cukai pendapatan yang perlu dibayar bagi setiap yang berikut dengan mengambil kira rebat cukai sekiranya layak.

- (a) Pendapatan bercukai RM108 630

Pendapatan bercukai	RM35 270
Zakat	RM 500

- (b) Pendapatan bercukai RM28 440

Pendapatan bercukai	RM 52 394
Zakat	RM 1 250

3. Puan Aishah mempunyai jumlah pendapatan tahunan sebanyak RM61 593 pada tahun 2020. Jumlah pelepasan cukai yang dituntut olehnya adalah sebanyak RM14 320. Dia telah membayar zakat sebanyak RM700 pada tahun tersebut. Hitung cukai pendapatan yang perlu dibayar oleh Puan Aishah.

4. Pendapatan bercukai Puan Siew adalah sebanyak RM75 311. Setiap bulan gajinya dipotong sebanyak RM300 untuk potongan cukai bulanan (PCB). Namun, jumlah PCB tidak mencukupi untuk membayar cukai pendapatannya. Berapakah bayaran baki cukai pendapatan yang perlu dibuat kepada pihak LHDN?

5. Pada tahun 2020, Encik Subra dan isterinya mendapat gaji tahunan sebanyak RM61 000 dan RM56 000. Berikut ialah belanja yang dituntut oleh Encik Subra dan isterinya bagi tahun tersebut.

Perkara	Encik Subra	Isterinya
Individu	RM9 000	RM9 000
Insurans hayat dan KWSP (had RM7 000)	RM6 000	RM5 900
Gaya hidup (had RM2 500)	RM2 000	RM2 500
Tabung bersih SSPN (had RM8 000)	RM5 000	RM6 000
Insurans pendidikan (had RM3 000)	RM2 600	RM2 000

Hitung jumlah cukai pendapatan bagi Encik Subra dan isterinya dengan menggunakan cara taksiran cukai berasingan.

6. Firdaus mempunyai sebuah motosikal dan sebuah kereta dengan kapasiti enjin seperti ditunjukkan dalam rajah di bawah. Berdasarkan jadual di bawah, hitung cukai jalan untuk kedua-dua jenis kenderaan tersebut.



Kapasiti Enjin	Kadar Cukai Jalan	
	Kadar Asas	Kadar Progresif
Kadar Cukai Jalan Motosikal		
150 cc dan ke bawah	Percuma	-
151 cc - 200 cc	RM 30.00	-
201 cc - 250 cc	RM 50.00	-
Kadar Cukai Jalan Kereta Persendirian		
1 401 cc - 1 600 cc	RM 90.00	-
1 601 cc - 1 800 cc	RM 200.00	+ RM 0.40 setiap cc melebihi 1 600 cc
1 801 cc - 2 000 cc	RM 280.00	+ RM 0.50 setiap cc melebihi 1 800 cc
2 001 cc - 2 500 cc	RM 380.00	+ RM 1.00 setiap cc melebihi 2 000 cc

7. Puan Kim memiliki sebuah pangsapuri servis di Shah Alam. Cukai pintu yang dikenakan ialah 5%. Diberi bahawa sewa rumah itu dianggarkan pada RM1 500 sebulan. Hitung jumlah cukai pintu yang perlu dibayar oleh Puan Kim setiap tahun.
8. Encik Abdullah memiliki sebidang tanah kegunaan kediaman yang seluas 300 m² di Kedah. Diberi bahawa kadar cukai tanah yang dikenakan ialah RM0.15 setiap meter persegi. Hitung jumlah cukai tanah yang perlu dibayar oleh Encik Abdullah setiap tahun.

9. Yi Soon makan malam di sebuah restoran. Dia telah makan sepinggan nasi goreng, dua ketul ayam goreng dan secawan kopi. Jadual di bawah menunjukkan harga makanan dan minumannya.

Makanan dan Minuman	Harga
Nasi goreng	RM6.00 / pinggan
Ayam goreng	RM5.00 / ketul
Kopi	RM4.00 / cawan

Diberi bahawa restoran itu mengenakan cukai perkhidmatan 6%, hitung bil Yi Soon.

Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan percukaian?

Contoh 11

Sabrina mempunyai pendapatan bercukai sebanyak RM30 633 pada tahun 2020. Dia telah membayar zakat berjumlah RM230 pada tahun tersebut.

- Berapakah jumlah rebat cukai Sabrina?
- Hitung cukai pendapatan yang perlu dibayar oleh Sabrina.

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan percukaian.

Penyelesaian:

Memahami masalah

Pendapatan bercukai
= RM30 633
Rebat (zakat) = RM230

Merancang strategi

- Tentukan rebat zakat dan rebat pendapatan bercukai $\leq$ RM35 000.
- Hitung cukai pendapatan dengan merujuk jadual kadar cukai dan jumlah rebat.

Melaksanakan strategi

$$\begin{aligned} \text{(a) Jumlah rebat cukai Sabrina} &= \text{RM400} + \text{RM230} \\ &= \text{RM630} \end{aligned}$$

Rebat RM400 untuk pendapatan bercukai $\leq$ RM35 000 dan rebat RM230 untuk bayaran zakat

$$\text{(b) Cukai bagi RM20 000 pertama} = \text{RM150}$$

$$\begin{aligned} \text{Cukai atas baki berikutnya} &= (\text{RM30 633} - \text{RM20 000}) \times 3\% \\ &= \text{RM10 633} \times 3\% \\ &= \text{RM318.99} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cukai pendapatan yang perlu dibayar} &= \text{RM150} + \text{RM318.99} - \text{RM630} \\ &= (-\text{RM161.01}) \\ &= \text{RM0} \end{aligned}$$

Rebat yang berlebihan tidak akan dibayar balik kepada pembayar cukai. Jadi, cukai yang perlu dibayar = RM0

Membuat kesimpulan

$$\text{(a) RM630}$$

$$\text{(b) RM0}$$

Contoh 12

Jadual di bawah ialah perkara-perkara pengecualian dan pelepasan cukai Encik Hanafi.

Individu	RM9 000
Insurans hayat dan KWSP (had RM7 000)	RM6 000
Derma kepada perpustakaan	RM 500

Diberi bahawa pendapatan tahunan Encik Hanafi pada tahun 2020 ialah RM70 000 dan bayaran zakat ialah RM500.

- Hitung pendapatan bercukai bagi Encik Hanafi.
- Hitung cukai pendapatan yang perlu dibayar oleh Encik Hanafi.
- Bincangkan perbezaan antara pelepasan cukai dengan rebat cukai.

Penyelesaian:**Memahami masalah**

Pendapatan tahunan = RM70 000
 Pelepasan individu = RM 9 000
 Pelepasan insurans hayat dan KWSP = RM 6 000
 Pengecualian derma = RM 500
 Bayaran zakat = RM 500

Merancang strategi

- Tentukan pendapatan bercukai dengan mengambil kira pengecualian cukai dan pelepasan cukai.
- Hitung cukai pendapatan dengan merujuk jadual kadar cukai dan jumlah rebat.
- Bezakan maksud pelepasan dan rebat.

Melaksanakan strategi

- $$\begin{aligned} \text{Pendapatan bercukai} &= \text{pendapatan tahunan} - \text{pengecualian cukai} - \text{pelepasan cukai} \\ &= \text{RM70 000} - \text{RM500} - (\text{RM9 000} + \text{RM6 000}) \\ &= \text{RM54 500} \end{aligned}$$
- Merujuk jadual kadar cukai:

$$\begin{aligned} \text{Cukai bagi RM50 000 pertama} &= \text{RM1 800} \\ \text{Cukai atas baki berikutnya} &= (\text{RM54 500} - \text{RM50 000}) \times 14\% \\ &= \text{RM4 500} \times 14\% \\ &= \text{RM630} \\ \text{Cukai pendapatan yang perlu dibayar} &= \text{RM1 800} + \text{RM630} - \text{RM500} \\ &= \text{RM1 930} \end{aligned}$$
- Pelepasan cukai ditolak daripada pendapatan tahunan. Rebate cukai ditolak daripada cukai pendapatan yang dikenakan.

Membuat kesimpulan

- RM54 500
- RM1 930
- Pelepasan cukai ditolak daripada pendapatan tahunan manakala rebat cukai ditolak daripada cukai pendapatan yang dikenakan.

Contoh 13

Encik Khor telah menggunakan 650 kWj elektrik pada bulan November. Diberi bahawa penggunaan yang melebihi 600 kWj dalam sebulan akan dikenakan cukai perkhidmatan sebanyak 6%. Jadual di bawah menunjukkan bil elektrik rumah kediaman Encik Khor pada bulan November.

Blok Tarif (kWj)	Blok Prorata (kWj)	Kadar (RM)	Amaun (RM)
200	200	0.218	43.60
100	100	0.334	x
300	300	0.516	y
300	50	0.546	z

- Hitung nilai x , nilai y dan nilai z .
- Hitung jumlah bayaran yang tidak dikenakan cukai perkhidmatan.
- Hitung cukai perkhidmatan yang dikenakan dalam bil elektrik bulan November.

Penyelesaian:**Memahami masalah**

Jumlah penggunaan elektrik
= 650 kWj

Kadar cukai perkhidmatan = 6%

Merancang strategi

- Hitung nilai x , nilai y dan nilai z .
- Hitung jumlah bayaran yang tidak dikenakan cukai perkhidmatan.
- Hitung cukai perkhidmatan yang dikenakan.

Melaksanakan strategi

$$\begin{aligned} \text{(a) } x &= 100 \times 0.334 \\ &= 33.40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 300 \times 0.516 \\ &= 154.80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 50 \times 0.546 \\ &= 27.30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) Jumlah bayaran yang tidak dikenakan cukai perkhidmatan} & \\ &= \text{RM}43.60 + \text{RM}33.40 + \text{RM}154.80 \\ &= \text{RM}231.80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) Cukai perkhidmatan yang dikenakan} &= \text{RM}27.30 \times 6\% \\ &= \text{RM}1.64 \end{aligned}$$

Membuat kesimpulan

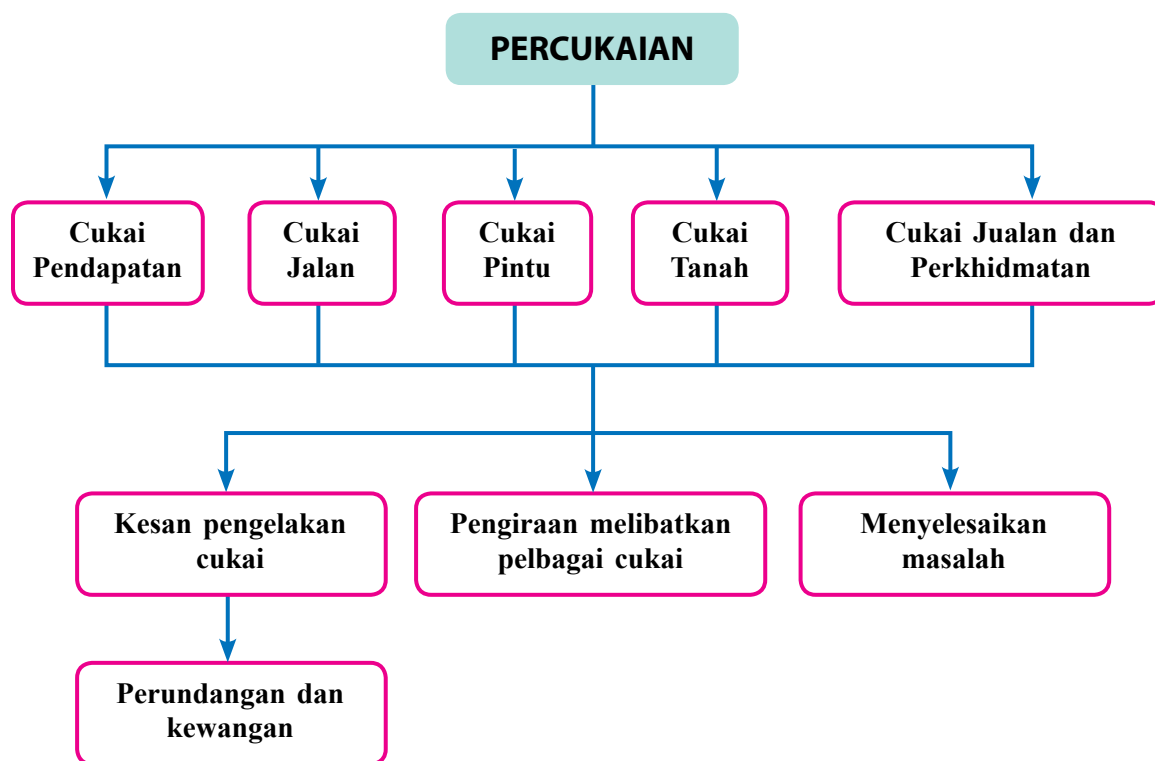
- $x = 33.40$, $y = 154.80$, $z = 27.30$
- RM231.80
- RM1.64



Latih Kendiri 4.1d

1. Han dan isterinya masing-masing mendapat gaji tahunan sebanyak RM63 400 dan RM52 100 pada tahun 2020. Diberi bahawa jumlah pelepasan yang layak dituntut oleh Han dan isterinya ialah RM61 219. Hitung jumlah cukai pendapatan yang perlu dibayar oleh Han dan isterinya jika taksiran cukai bersama dibuat.
2. Encik Jamil adalah seorang pengurus di sebuah syarikat. Gaji tahunannya pada tahun 2020 ialah RM146 200. Pada tahun tersebut, dia membayar jumlah zakat sebanyak RM2 500. Diberi bahawa jumlah pelepasan cukainya ialah RM46 250 dan PCB dipotong sebanyak RM1 400 setiap bulan.
 - (a) Hitung pendapatan bercukai Encik Jamil.
 - (b) Hitung cukai pendapatan yang perlu dibayar oleh Encik Jamil.
 - (c) Perlukah Encik Jamil membuat bayaran cukai yang tidak mencukupi kepada LHDN? Jelaskan jawapan anda.

Arena Rumusan



Refleksi

Pada akhir bab ini, saya dapat



menghuraikan tujuan percukaian.

menghuraikan pelbagai cukai dan seterusnya kesan pengelakan cukai tersebut dari aspek perundangan dan kewangan.

mengkaji, mentafsir dan membuat pengiraan yang melibatkan pelbagai cukai.

menyelesaikan masalah yang melibatkan percukaian.

PROJEK MINI

Pembayar cukai perlu mentaksir, melapor dan membayar cukai pendapatan setiap tahun. Dengan menggunakan perkara-perkara pengecualian dan pelepasan cukai yang terkini, anda dikehendaki membuat satu folio berkaitan taksiran cukai pendapatan bagi seorang daripada ahli keluarga anda. Folio anda perlu mengandungi

- (a) muka hadapan
- (b) kandungan:
 - (i) Pengenalan cukai pendapatan
 - (ii) Perkara-perkara pengecualian dan pelepasan cukai yang terkini
 - (iii) Taksiran cukai pendapatan ahli keluarga
- (c) kesimpulan

Latih Ekstensif

Imbas kod QR atau layari
bit.do/Kuiz04 untuk kuiz interaktif



FAHAM

- Huraikan tujuan cukai sebagai alat pelaksanaan polisi kerajaan dengan contoh yang bersesuaian.
- Nyatakan pihak yang bertanggungjawab untuk mengutip
 - cukai pendapatan
 - cukai pintu
 - cukai jalan
 - cukai jualan dan perkhidmatan
- _____ ialah cukai yang dikenakan atas pendapatan yang diperoleh oleh seseorang individu atau sesebuah syarikat di Malaysia.

4. Nyatakan kesan pengelakan cukai pintu.
5. Jelaskan maksud pelepasan cukai bagi cukai pendapatan.
6. Nyatakan dua jenis rebat cukai yang dibenarkan oleh kerajaan.

MASTERI

7. Azman memiliki sebidang tanah berkeluasan $6.7 \text{ m} \times 22.9 \text{ m}$ untuk membina rumah kediaman. Kerajaan negeri menetapkan kadar cukai tanah di kawasan itu pada RM0.40 setiap meter persegi. Hitung jumlah cukai tanah yang perlu dibayar oleh Azman setiap tahun.
8. Gaji bulanan Jordan ialah RM6 500. Pada tahun 2020, dia telah mendapat bonus sebanyak sebulan gaji dan elaun-elaun berjumlah RM9 600 yang dikecualikan cukai. Dia juga menderma kepada organisasi yang diluluskan oleh kerajaan berjumlah RM1 000. Diberi bahawa jumlah pelepasan yang dibenarkan ialah RM10 400. Hitung pendapatan bercukai Jordan.
9. Encik Osman mempunyai pendapatan bercukai sebanyak RM35 800 pada tahun 2020. Dia telah membayar zakat berjumlah RM700. Hitung cukai pendapatan yang perlu dibayar oleh Encik Osman bagi tahun tersebut.
10. Jun Kiat hendak membeli sebuah kereta baharu untuk digunakan di Semenanjung Malaysia. Dia memperuntukkan RM280 untuk membayar cukai jalan bagi kereta baharunya. Berapakah kapasiti enjin yang maksimum bagi kereta baharu Jun Kiat?
11. Encik Raju memiliki sebuah pangsapuri servis di Ampang. Sewa pangsapuri itu dianggarkan pada RM1 200 sebulan dan dia membayar RM648 setahun untuk cukai pintu. Hitung kadar cukai pintu bagi pangsapuri servis itu.
12. Selvi membeli sebungkus nasi lemak di sebuah gerai dengan harga RM5.50, tanpa cukai perkhidmatan. Dia kemudiannya membeli secawan kopi dari kedai kopi dengan harga RM14.80 termasuk cukai perkhidmatan 6%.
 - (a) Jelaskan sebab cukai jualan dan perkhidmatan tidak dikutip di gerai.
 - (b) Hitung harga asal secawan kopi tidak termasuk cukai jualan dan perkhidmatan.
13. Encik Suhaimi mendapat gaji tahunan sebanyak RM85 700 pada tahun 2020. Isterinya tidak mempunyai pendapatan. Berikut ialah belanja yang hendak dituntut oleh Encik Suhaimi.

Perkara	Encik Suhaimi
Individu	RM9 000
Insurans hayat dan KWSP (had RM7 000)	RM7 760
Gaya hidup (had RM2 500)	RM2 000
Suami / isteri (pelepasan untuk suami atau isteri yang tiada pendapatan)	RM4 000
Perbelanjaan rawatan perubatan ibu bapa (had RM5 000)	RM1 500

Hitung jumlah cukai pendapatan bagi Encik Suhaimi dengan menggunakan cara taksiran cukai bersama.

CABAR

14. Eng Huat ialah seorang pekerja kilang. Gaji tahunannya ialah RM45 000 setahun. Seperti tahun-tahun lepas, dia memberikan derma tetap sejumlah RM500 kepada pusat kebajikan kesihatan yang diluluskan. Diberi bahawa jumlah pelepasan yang dituntut ialah RM12 530.
- Hitung pendapatan bercukai Eng Huat.
 - Jelaskan sama ada Eng Huat layak menerima rebat cukai.
 - Hitung cukai pendapatan yang perlu dibayar oleh Eng Huat.
15. Pendapatan tahunan Puan Aida ialah RM84 400 pada tahun 2020. Dia menuntut pelepasan cukai bagi individu sebanyak RM9 000, insurans hayat dan KWSP sebanyak RM7 000, gaya hidup sebanyak RM1 200, insurans perubatan sebanyak RM2 800, perbelanjaan rawatan perubatan ibu bapa sebanyak RM2 100 dan seorang anak berumur 18 tahun ke bawah yang belum berkahwin sebanyak RM2 000. Puan Aida telah membuat bayaran zakat sebanyak RM600 pada tahun tersebut.
- Hitung pendapatan bercukai bagi Puan Aida.
 - Hitung cukai pendapatan yang perlu dibayar oleh Puan Aida.
 - Jika PCB sebanyak RM450 telah ditolak setiap bulan daripada gajinya, adakah Puan Aida perlu membuat bayaran cukai pendapatannya?



TEROKAI MATEMATIK

Perisian hamparan elektronik (*spreadsheet*) boleh digunakan untuk memudahkan pengiraan cukai pendapatan. Dengan menggunakan hamparan elektronik, hitung cukai pendapatan bagi pendapatan bercukai RM5 000, RM15 000, RM30 000, ... , RM150 000. Imbas kod QR atau layari bit.do/PengiraanCukai untuk pengiraan anda.

Pengiraan cukai- pendapatan				Pendapatan bercukai		Cukai Pendapatan		Cukai Pendapatan Yang Perlu Dibayar	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	Pendapatan bercukai			5000					
12	Cukai dasar	8.8%		13000					
13	Belanjawan pendapatan bercukai (berbilik)	0.00		30000					
14	Cukai ke atas belanjawan (berbilik)	8.8%		48000					
15	Jumlah cukai pendapatan	8.8%		19000					
16				90000					
17				100000					
18	Pendapatan bercukai	Cukai dasar	% cukai ke atas belanjawan	120000					
19	0	0	0	130000					
20	10000	1300	8	140000					
21	20000	2600	13	150000					
22	30000	3900	14	160000					
23	40000	5200	15	170000					
24	50000	6500	16	180000					
25	60000	7800	17	190000					
26	70000	9100	18	200000					
27	80000	10400	19	210000					
28	90000	11700	20	220000					
29	100000	13000	21	230000					
30	110000	14300	22	240000					
31	120000	15600	23	250000					
32	130000	16900	24	260000					
33	140000	18200	25	270000					
34	150000	19500	26	280000					

Masukkan nilai pendapatan bercukai ke dalam kotak kuning. Kemudian, masukkan nilai cukai pendapatan yang sepadan ke dalam kotak hijau.

Perhatikan graf Cukai Pendapatan Yang Perlu Dibayar di sebelah, buat satu kesimpulan berdasarkan graf tersebut.



BAB 5

Kekongruenan, Pembesaran dan Gabungan Transformasi

Apakah yang akan anda pelajari?

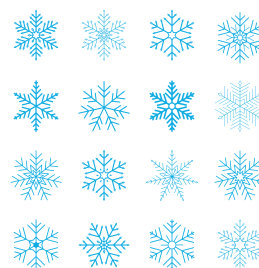
- Kekongruenan
- Pembesaran
- Gabungan Transformasi
- Teselasi

Maslahat Bab Ini

Ahli astronomi menggunakan teleskop untuk memerhati permukaan sesuatu planet. Permukaan planet yang jauh kelihatan diperbesarkan dengan menggunakan teleskop. Akan tetapi imej yang dihasilkan adalah songsang dengan objek asalnya. Pantulan diaplikasikan untuk mendapat gambaran yang sebenar.

Tahukah Anda?

Johannes Kepler (1571-1630) merupakan seorang ahli matematik dan astronomi Jerman yang telah membuat dokumentasi tentang kajian teselasi pada tahun 1619. Beliau menggunakan konsep teselasi untuk meneroka serta menjelaskan struktur emping salji.



Untuk maklumat lanjut:



bit.do/TahukahAndaBab5

GERBANG ISTILAH



faktor skala
kekongruenan
keserupaan
pantulan
pembesaran
putaran
teselasi
transformasi
translasi

scale factor
congruency
similarity
reflection
enlargement
rotation
tessellation
transformation
translation



Jambatan Angkat Terengganu yang terletak di Kuala Terengganu merupakan suatu mercu tanda baharu bagi Negeri Terengganu pada tahun 2019. Jambatan angkat ini merupakan jambatan angkat yang terpanjang di dunia dengan panjang 638 meter, menghubungkan Kuala Terengganu dan Kuala Nerus di muara Sungai Terengganu. Keistimewaan jambatan ini ialah boleh diangkat pada bahagian tengah untuk memudahkan laluan kapal-kapal besar di bawahnya. Perhatikan struktur jambatan tersebut, bahagian manakah kongruen?

5.1 Kekongruenan

Bagaimanakah membezakan antara bentuk kongruen dengan bukan kongruen?

Perhatikan setiap rajah di bawah. Apakah ulasan anda tentang saiz dan bentuk bagi pasangan objek yang ditunjukkan?



Dua keping jubin yang dipamerkan



Menara Berkembar Petronas



Tayar depan dan tayar belakang sebuah kereta

Standard Pembelajaran

Membezakan antara bentuk kongruen dan bukan kongruen berdasarkan sisi dan sudut.

Pasangan objek dalam setiap rajah di atas mempunyai saiz dan bentuk yang sama walaupun kedudukan atau susunannya berlainan. Pasangan objek tersebut dikatakan **kongruen**.

Apakah ciri-ciri yang digunakan untuk mengenal pasti dua objek adalah kongruen?

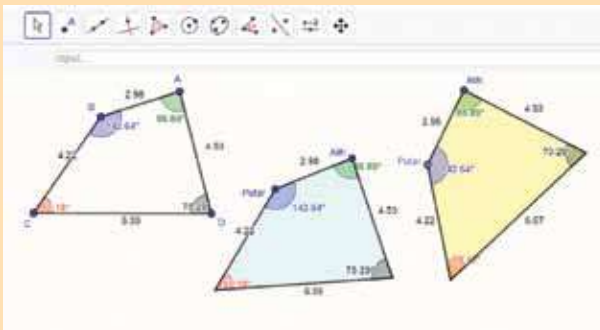
MOBILISASI MINDA 1

 Berpasangan

Tujuan: Meneroka bentuk kongruen berdasarkan sisi dan sudut.

Langkah:

1. Buka fail GGB501 untuk aktiviti ini.



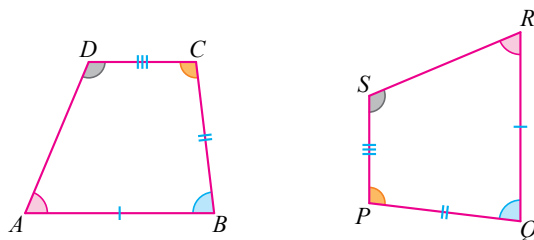
Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB501 untuk mendapatkan fail GeoGebra aktiviti ini.

2. Perhatikan panjang sisi dan saiz sudut bagi setiap sisi empat yang dipaparkan.
3. Seret titik “Alih” dan “Putar” untuk menggerakkan sisi empat berwarna biru supaya bertindih dengan sisi empat ABCD. Adakah sisi empat berwarna biru bertindih secara penuh dengan sisi empat ABCD? Apakah pemerhatian anda terhadap panjang sisi dan saiz sudutnya?
4. Ulangi langkah 3 untuk sisi empat berwarna kuning.

Perbincangan:

Apakah kesimpulan anda tentang kongruen berdasarkan sisi dan sudut?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 1, didapati bahawa dua poligon yang **kongruen** mempunyai ukuran yang sama pada panjang sisi sepadan dan sudut sepadan.

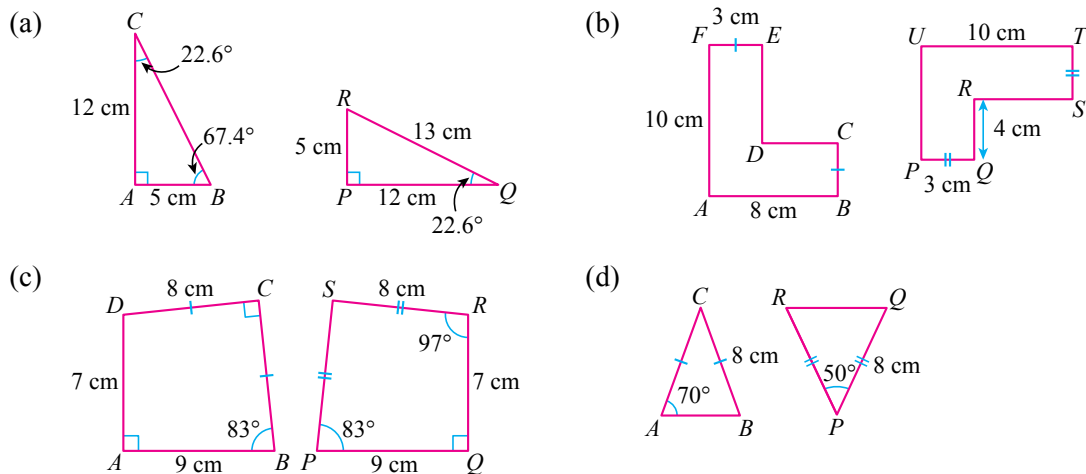


Dalam rajah di atas, sisi empat $ABCD$ dan $PQRS$ adalah kongruen dengan syarat yang ditunjukkan di dalam jadual berikut.

Panjang sisi sepadan	Sudut sepadan
$AB = RQ$ $BC = QP$ $CD = PS$ $AD = RS$	$\angle BAD = \angle QRS$ $\angle ABC = \angle RQP$ $\angle BCD = \angle QPS$ $\angle ADC = \angle RSP$

Contoh 1

Tentukan sama ada setiap pasangan rajah yang berikut adalah kongruen.



Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad BC &= \sqrt{5^2 + 12^2} & \text{dan} & \quad \angle PRQ = 180^\circ - 90^\circ - 22.6^\circ \\
 &= 13 \text{ cm} & & \quad = 67.4^\circ \\
 &= RQ & & \quad = \angle ABC
 \end{aligned}$$

Ukuran semua panjang sisi sepadan dan sudut sepadan adalah sama. Maka, kedua-dua rajah itu adalah kongruen.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad DC &= 8 - 3 & \text{atau} & \quad PU = 4 + 3 \\ &= 5 \text{ cm} & & \quad = 7 \text{ cm} \\ &\neq RQ & & \quad \neq BA \end{aligned}$$

Maka, kedua-dua rajah itu bukan kongruen.

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \angle ADC &= 360^\circ - 90^\circ - 83^\circ - 90^\circ \\ &= 97^\circ \\ &= \angle QRS \end{aligned}$$

Ukuran semua panjang sisi sepadan dan sudut sepadan adalah sama. Maka, kedua-dua rajah itu adalah kongruen.

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \angle ACB &= 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ \\ &= 40^\circ \\ &\neq \angle QPR \end{aligned}$$

Maka, kedua-dua rajah itu bukan kongruen.

TiP Bestari

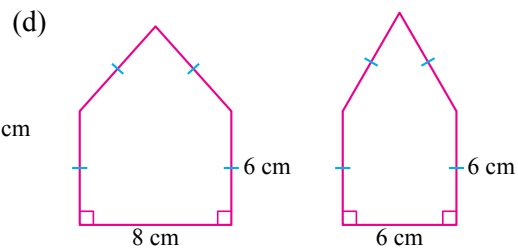
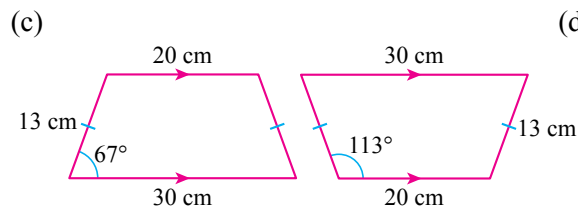
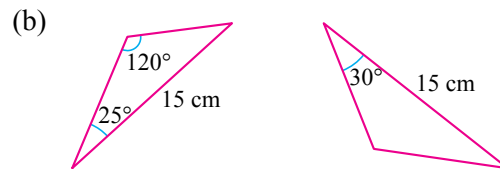
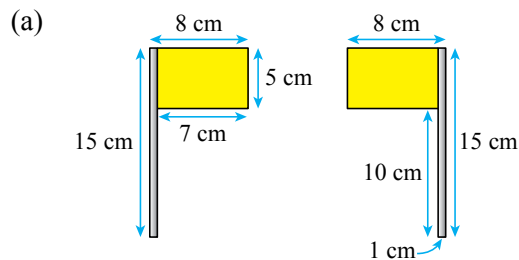
Jika terdapat satu daripada panjang sisi sepadan atau sudut sepadan yang tidak sama antara dua bentuk, maka kedua-dua bentuk itu bukan kongruen.

Buletin Ilmiah

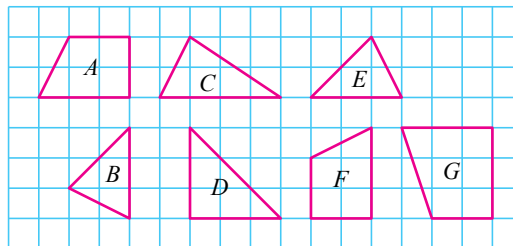
Segi tiga ABC dan PQR yang kongruen dapat ditulis sebagai $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

Latih Kendiri 5.1a

1. Tentukan sama ada setiap pasangan rajah yang berikut adalah kongruen.



2. Tentukan pasangan kongruen dalam rajah di bawah.



Apakah ciri-ciri kekongruenan segi tiga?

Dua segi tiga kongruen mempunyai panjang sisi sepadan dan sudut sepadan yang sama.



Bolehkah kita mengatakan dua segi tiga adalah kongruen sekiranya hanya membandingkan sebahagian sisi sepadan atau sudut sepadan?

Standard Pembelajaran

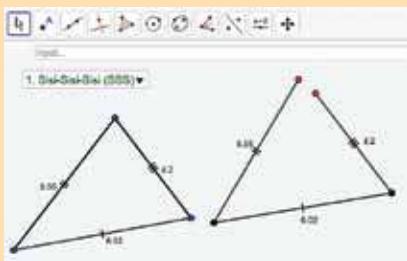
Membuat dan menentukan konjektur terhadap kekongruenan segi tiga berdasarkan sisi dan sudut.

MOBILISASI MINDA 2 Berkumpulan

Tujuan: Membuat dan menentukan konjektur terhadap kekongruenan segi tiga.

Langkah:

1. Buka fail GGB502 untuk aktiviti ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB502 untuk mendapatkan fail GeoGebra aktiviti ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/LKBab5i untuk mendapatkan lembaran kerja aktiviti ini.

2. Pilih Sisi-Sisi-Sisi (SSS). Perhatikan ukuran yang dilabel pada kedua-dua rajah.
3. Seret titik-titik merah untuk membentuk satu segi tiga yang lengkap. Seret titik-titik hitam untuk mengubah kedudukan atau orientasi. Dapatkah anda membentuk segi tiga yang kongruen? Dapatkah anda menjumpai segi tiga bukan kongruen?
4. Seret titik-titik biru untuk mengubah bentuk segi tiga dan ulang langkah 3.
5. Pilih Sisi-Sudut-Sisi (SAS), Sudut-Sisi-Sudut (ASA), Sudut-Sudut-Sisi (AAS), Sudut-Sudut-Sudut (AAA) dan Sisi-Sisi-Sudut (SSA) dan ulang langkah 2 hingga 4 untuk penerokaan kekongruenan segi tiga yang lain.
6. Buka lembaran kerja untuk aktiviti ini. Lengkapkan berdasarkan penerokaan anda.

	Dapatkah anda membentuk segi tiga yang kongruen?	Dapatkah anda menjumpai segi tiga bukan kongruen?	Kesimpulan
Sisi-Sisi-Sisi (SSS)			Jika _____, maka segi tiga adalah kongruen.

Perbincangan:

Apakah kesimpulan anda tentang kekongruenan segi tiga berdasarkan sisi dan sudut?

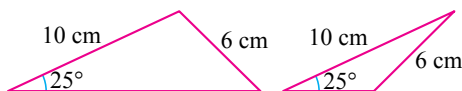
Hasil daripada Mobilisasi Minda 2, didapati kekongruenan segi tiga mempunyai sifat-sifat yang tertentu seperti ditunjukkan dalam jadual berikut.

Sifat kekongruenan segi tiga	
Sisi-Sisi-Sisi (<i>Side-Side-Side</i> – SSS) - Setiap sisi sepadan adalah sama panjang $AC = PR$ $AB = PQ$ $BC = QR$	
Sisi-Sudut-Sisi (<i>Side-Angle-Side</i> – SAS) - Dua sisi sepadan adalah sama panjang dan sudut sepadan yang terangkum antara dua sisi itu adalah sama saiz $AC = PR$ $\angle BAC = \angle QPR$ $AB = PQ$	
Sudut-Sisi-Sudut (<i>Angle-Side-Angle</i> – ASA) - Dua sudut sepadan adalah sama saiz dan satu sisi sepadan di antara kedua-dua sudut itu adalah sama panjang $\angle BAC = \angle QPR$ $AC = PR$ $\angle ACB = \angle PRQ$	
Sudut-Sudut-Sisi (<i>Angle-Angle-Side</i> – AAS) - Dua sudut sepadan adalah sama saiz dan satu daripada sisi sepadan yang bukan terletak di antara dua sudut itu adalah sama panjang $\angle BAC = \angle QPR$ $\angle ACB = \angle PRQ$ $BC = QR$	
Sudut-Sudut-Sudut (<i>Angle-Angle-Angle</i> – AAA) - Ketiga-tiga sudut sepadan adalah sama saiz - Luas pasangan segi tiga mestilah sama $\angle BAC = \angle QPR$ $\angle ACB = \angle PRQ$ $\angle ABC = \angle PQR$	
Sisi-Sisi-Sudut (<i>Side-Side-Angle</i> – SSA) - Dua sisi sepadan adalah sama panjang dan satu daripada sudut sepadan yang bukan terangkum antara dua sisi itu adalah sama saiz - Luas pasangan segi tiga mestilah sama $AC = PR$, $AB = PQ$, $\angle ACB = \angle PRQ$	

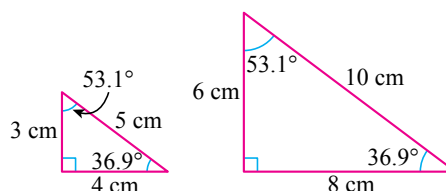
Contoh 2

Tentukan sama ada setiap pasangan segi tiga yang berikut memenuhi sifat kekongruenan segi tiga. Justifikasikan jawapan anda.

(a)



(b)



Penyelesaian:

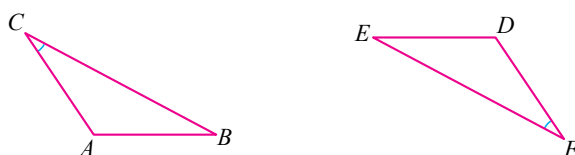
- (a) Tidak. Walaupun kedua-dua segi tiga mempunyai dua sisi sepadan dan satu sudut sepadan yang sama, tetapi ukuran sisi dan sudut yang lain adalah berbeza. Luas adalah tidak sama.
- (b) Tidak. Walaupun kedua-dua segi tiga mempunyai tiga sudut sepadan yang sama, tetapi ukuran semua sisi sepadan adalah berbeza. Luas adalah tidak sama.

TiP Bestari

Sisi-Sisi-Sudut (SSA) dan Sudut-Sudut-Sudut (SSS) tidak boleh digunakan untuk menentukan dua segi tiga adalah kongruen kecuali luas dua segi tiga itu adalah sama.

Contoh 3

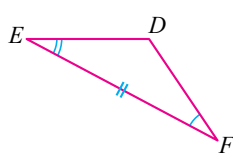
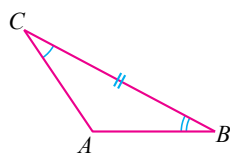
Rajah di bawah menunjukkan dua segi tiga yang kongruen.



Diberi sifat kekongruenan segi tiga yang digunakan untuk menentukan kedua-dua segi tiga itu adalah kongruen ialah Sudut-Sisi-Sudut (ASA). Lengkapkan jadual di bawah dengan ciri-ciri lain yang terlibat dalam Sudut-Sisi-Sudut (ASA).

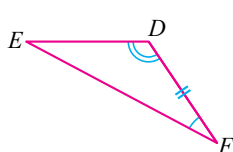
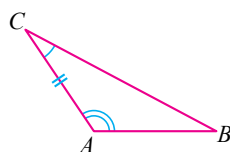
Sudut	$\angle ACB = \angle DFE$
Sisi	
Sudut	

Penyelesaian:



Sudut	$\angle ACB = \angle DFE$
Sisi	$BC = EF$
Sudut	$\angle ABC = \angle DEF$

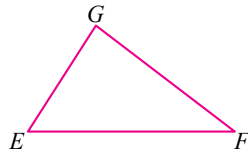
atau



Sudut	$\angle ACB = \angle DFE$
Sisi	$AC = DF$
Sudut	$\angle BAC = \angle EDF$

Contoh 4

Rajah di bawah menunjukkan satu segi tiga EFG .

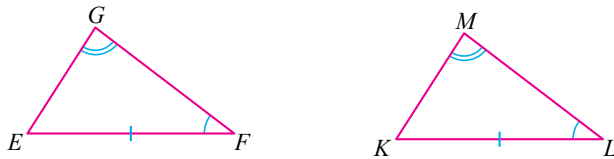


Diberi satu lagi segi tiga KLM mempunyai bentuk dan saiz yang sama dengan segi tiga EFG . Nyatakan sifat kekongruenan segi tiga yang digunakan untuk menentukan kedua-dua segi tiga itu adalah kongruen sekiranya

- (a) $\angle EGF = \angle KML$, $\angle EFG = \angle KLM$, $EF = KL$
- (b) $EG = KM$, $FG = LM$, $EF = KL$
- (c) $EF = KL$, $\angle FEG = \angle LKM$, $EG = KM$

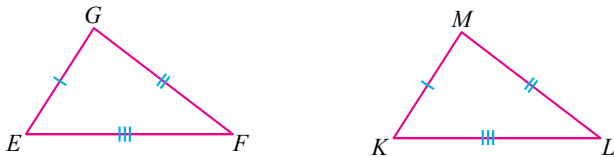
Penyelesaian:

(a)



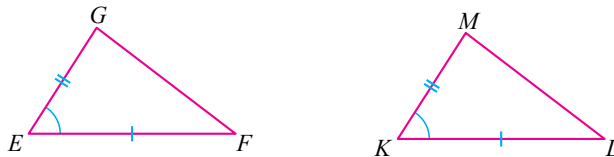
Diberi dua sudut sepadan dan satu sisi sepadan yang bukan di antara kedua-dua sudut itu. Oleh itu, sifat kekongruenan segi tiga ialah Sudut-Sudut-Sisi (AAS).

(b)



Diberi tiga sisi sepadan. Oleh itu, sifat kekongruenan segi tiga ialah Sisi-Sisi-Sisi (SSS).

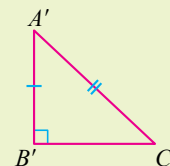
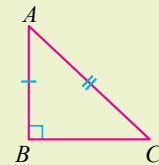
(c)



Diberi dua sisi sepadan dan satu sudut sepadan terangkum antara dua sisi itu. Oleh itu, sifat kekongruenan segi tiga ialah Sisi-Sudut-Sisi (SAS).

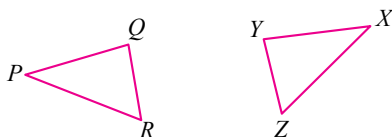
Buletin Ilmiah

Sudut Tegak-Hipotenus-Sisi (RHS) juga merupakan suatu sifat kekongruenan khas untuk segi tiga bersudut tegak. Jika dua segi tiga bersudut tegak mempunyai hipotenus dan satu daripada sisi sepadan bukan hipotenus yang sama, maka kedua-dua segi tiga itu kongruen. Sifat kekongruenan segi tiga ini berasaskan sifat Sisi-Sisi-Sudut (SSA).



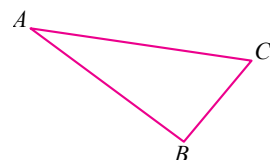
Latih Kendiri 5.1b

1. Rajah di bawah menunjukkan dua segi tiga, PQR dan XYZ .



Diberi bahawa kedua-dua segi tiga PQR dan XYZ adalah kongruen. Jika $PQ = XY$, nyatakan ciri-ciri lain yang terlibat jika setiap berikut digunakan.

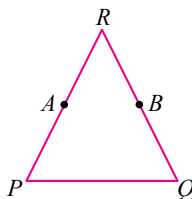
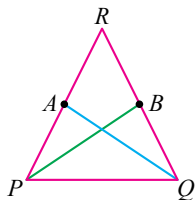
- Sisi-Sudut-Sisi
 - Sisi-Sisi-Sudut
2. Rajah di sebelah menunjukkan satu segi tiga ABC . Diberi bahawa satu lagi segi tiga PQR adalah kongruen dengan segi tiga ABC . Nyatakan sifat kekongruenan segi tiga yang terlibat jika
- $AB = PQ$, $BC = QR$ dan $AC = PR$
 - $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle PQR$ dan $\angle BAC = \angle QPR$



Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan kekongruenan?

Contoh 5

Rajah di sebelah menunjukkan satu segi tiga sama kaki PQR dengan keadaan $PR = QR$. A dan B masing-masing ialah titik tengah bagi sisi PR dan QR . Tunjukkan bahawa segi tiga PBR dan QAR adalah kongruen.

**Penyelesaian:**

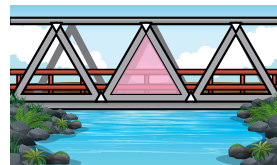
Berdasarkan rajah di sebelah,

- $PR = QR$
- $\angle PRB = \angle QRA$
- $BR = AR$

Segi tiga PBR dan QAR memenuhi sifat Sisi-Sudut-Sisi (SAS). Maka, segi tiga PBR dan QAR adalah kongruen.

Standard Pembelajaran

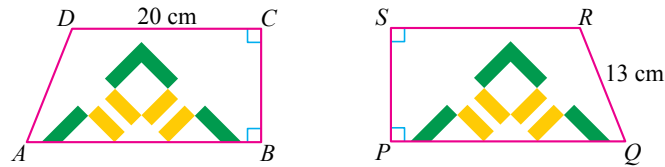
Menyelesaikan masalah yang melibatkan kekongruenan.

Aplikasi & Kejaya

Dalam bidang kejuruteraan, konsep kekongruenan segi tiga digunakan untuk membina penyokong jambatan supaya jambatan itu dapat disokong dalam keadaan yang seimbang.

Contoh 6

Siva menyediakan dua keping kad berbentuk trapezium yang kongruen seperti ditunjukkan dalam rajah di bawah. Setiap kad itu dilukis dengan separuh logo.



Siva mencantumkan dua keping kad itu untuk membentuk satu pentagon yang berlogo lengkap. Jika perimeter pentagon itu ialah 90 cm, hitung luas dalam cm^2 pentagon itu.

Penyelesaian:

Kaedah 1

Memahami masalah

- Trapezium $ABCD$ dan trapezium $QPSR$ adalah kongruen.
- $AB = QP$, $BC = PS$, $CD = SR$, $AD = QR$.
- Perimeter cantuman dua keping kad itu ialah 90 cm.
- Hitung luas pentagon yang terbentuk.

Melaksanakan strategi

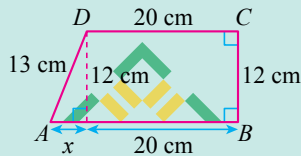
$$CS = 90 - 13 - 20 - 13 - 20 \\ = 24 \text{ cm}$$

$$CB = 12 \text{ cm}$$

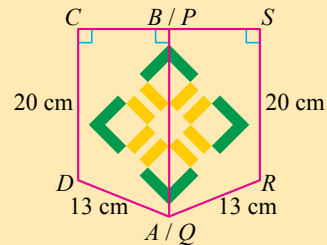
$$x = \sqrt{13^2 - 12^2} \\ = 5 \text{ cm}$$

$$AB = 20 + 5 \\ = 25 \text{ cm}$$

$$\text{Luas pentagon} = 2 \times \frac{1}{2}(20 + 25)(12) \\ = 540 \text{ cm}^2$$



Merancang strategi



- $CS = 90 \text{ cm} - AD - DC - QR - RS$
- Hitung panjang AB
- Luas pentagon $= 2 \times \text{luas trapezium}$

Membuat kesimpulan

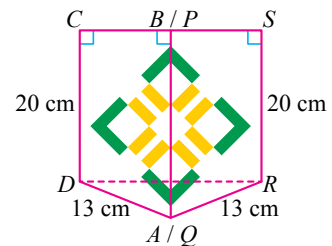
Maka, luas bagi pentagon itu ialah 540 cm^2 .

Kaedah 2

$$\text{Luas segi empat tepat } CDRS = 24 \times 20 \\ = 480 \text{ cm}^2$$

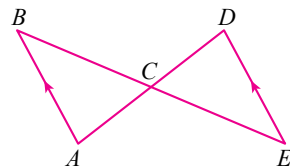
$$\text{Luas segi tiga } DRA = \frac{1}{2}(24)(5) \\ = 60 \text{ cm}^2$$

$$\text{Luas pentagon} = \text{luas segi empat tepat } CDRS + \text{luas segi tiga } DRA \\ = 480 + 60 \\ = 540 \text{ cm}^2$$

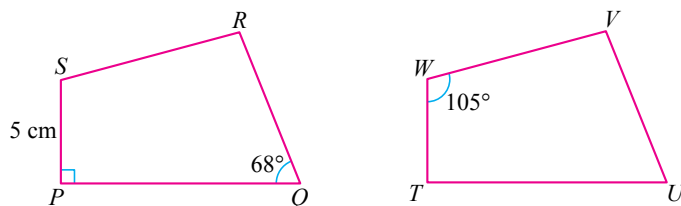


Latih Kendiri 5.1c

1. Dalam rajah di sebelah, garis AB dan DE adalah selari. BE dan AD ialah garis lurus. C ialah titik tengah bagi AD . Tunjukkan bahawa segi tiga ABC dan DEC adalah kongruen.

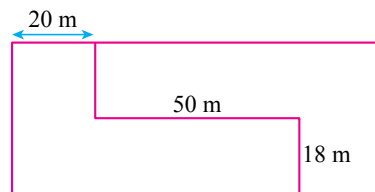


2. Rajah di bawah menunjukkan dua sisi empat yang kongruen.



Diberi bahawa panjang pepenjuru WU ialah 13 cm, hitung

- (a) panjang PQ dalam cm,
 (b) $\angle SRQ$.
3. Muizuddin membahagikan tanahnya yang berbentuk segi empat tepat kepada dua bahagian yang kongruen seperti ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Hitung
 (a) perimeter dalam m bagi setiap bahagian tanah,
 (b) luas dalam m^2 bagi setiap bahagian tanah.

**5.2 Pembesaran**

Apakah maksud keserupaan objek geometri?

Gambar di bawah menunjukkan model rumah yang **serupa** dengan rumah sebenar. Hal ini bermaksud model rumah tersebut mempunyai **bentuk yang sama** dengan rumah sebenar walaupun **saiz berbeza**. Apakah sifat yang terdapat pada keserupaan dua objek geometri?

**Standard Pembelajaran**

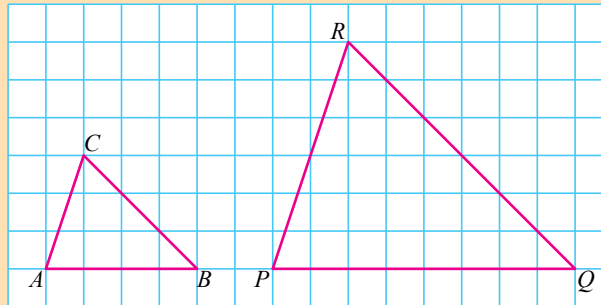
Menjelaskan maksud keserupaan objek geometri.

Tujuan: Mengenal keserupaan objek geometri.

Bahan: Pembaris dan protractor

Langkah:

1. Dengan menggunakan pembaris dan protractor, ukur sudut pada setiap bucu dan panjang setiap sisi bagi kedua-dua segi tiga dalam rajah berikut.



2. Lengkapkan jadual di bawah dengan pengukuran anda.

Saiz sudut		Panjang sisi		Nisbah sisi sepadan
Segi tiga ABC	Segi tiga PQR	Segi tiga ABC	Segi tiga PQR	
$\angle A =$	$\angle P =$	$AB =$	$PQ =$	$\frac{PQ}{AB} =$
$\angle B =$	$\angle Q =$	$BC =$	$QR =$	$\frac{QR}{BC} =$
$\angle C =$	$\angle R =$	$CA =$	$RP =$	$\frac{RP}{CA} =$

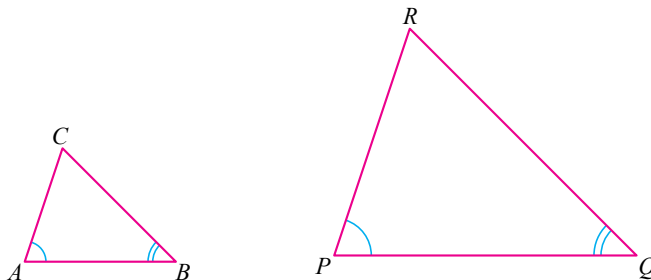
Perbincangan:

Kedua-dua segi tiga itu adalah serupa, nyatakan kesimpulan anda tentang

- (a) sudut sepadan kedua-dua segi tiga itu.
- (b) sisi sepadan kedua-dua segi tiga itu.

Hasil daripada Mobilisasi Minda 3, didapati bahawa dua objek geometri adalah **serupa** apabila

- semua sudut sepadan adalah sama, iaitu $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ dan $\angle C = \angle R$.
- semua nisbah sisi sepadan adalah sama, iaitu $\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$.



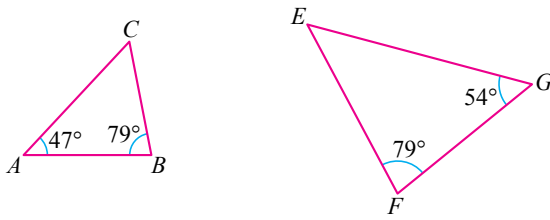
TiP Bestari

Jika semua sisi sepadan bagi sepasang segi tiga berkadaran, maka semua sudut sepadan adalah sama saiz dan sebaliknya.

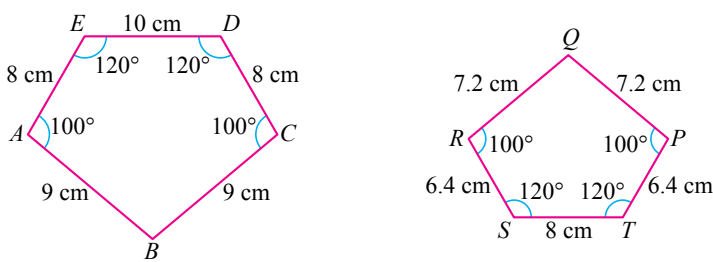
Contoh 7

Tentukan sama ada setiap pasangan objek geometri yang berikut adalah serupa.

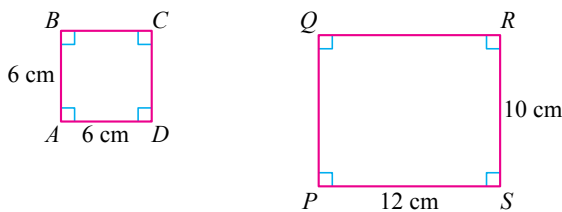
(a)



(b)



(c)

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \angle C &= 180^\circ - 47^\circ - 79^\circ \\ &= 54^\circ \\ &= \angle G \\ \angle B &= \angle F = 79^\circ \\ \angle A &= \angle E = 47^\circ \end{aligned}$$

Bagi sepasang segi tiga, semua sisi sepadan berkadar apabila semua sudut sepadan adalah sama. Maka, segi tiga ABC dan segi tiga EFG adalah serupa.

(b) Semua sudut sepadan adalah sama.

$$\begin{aligned} \frac{AB}{PQ} &= \frac{BC}{QR} = \frac{9}{7.2} = \frac{5}{4} \\ \frac{AE}{PT} &= \frac{CD}{RS} = \frac{8}{6.4} = \frac{5}{4} \\ \frac{ED}{TS} &= \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Semua nisbah sisi sepadan adalah sama. Maka, pentagon $ABCDE$ dan pentagon $PQRST$ adalah serupa.

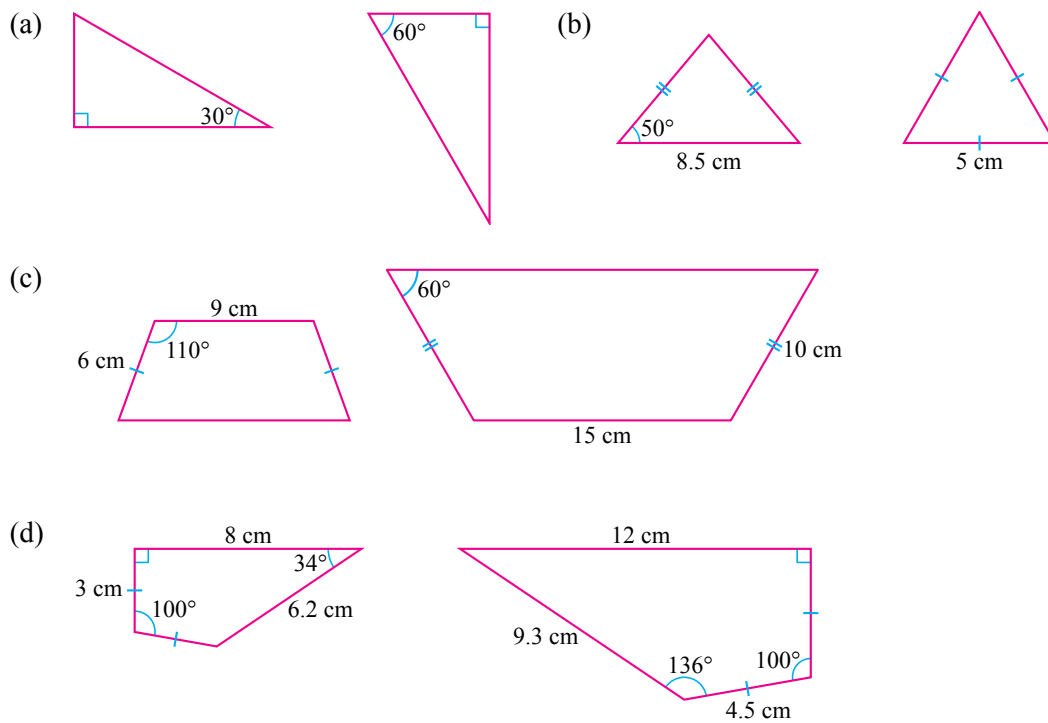
(c) Semua sudut sepadan adalah sama.

$$\begin{aligned} \frac{AB}{PQ} &= \frac{DC}{SR} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \\ \frac{AD}{PS} &= \frac{BC}{QR} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

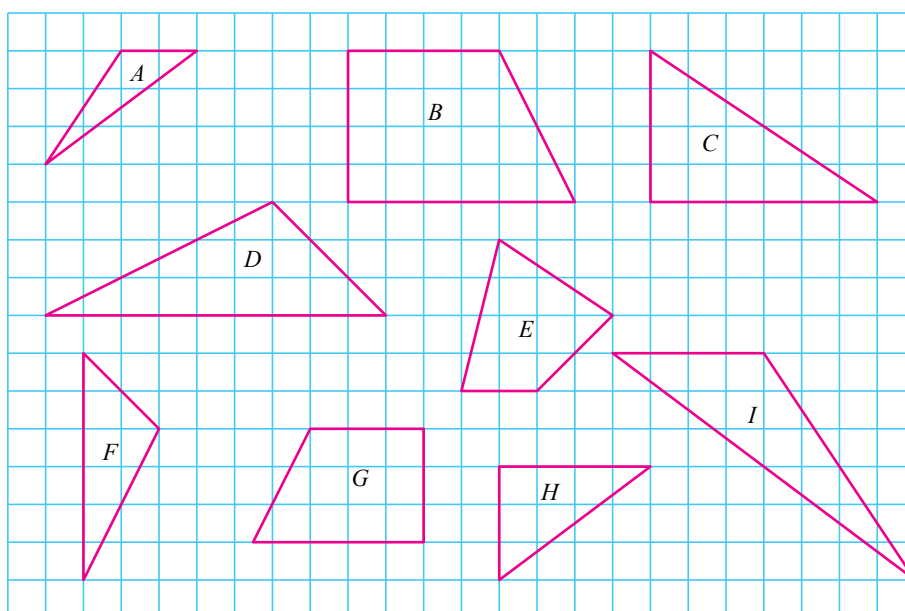
Nisbah sisi sepadan tidak sama. Maka, sisi empat $ABCD$ dan sisi empat $PQRS$ tidak serupa.

Latih Kendiri 5.2a

1. Tentukan sama ada setiap pasangan objek geometri yang berikut adalah serupa.



2. Tentukan pasangan objek yang serupa dalam rajah di bawah.



Apakah hubungan antara keserupaan dengan pembesaran dan bagaimanakah memerihalkan pembesaran?

Ahli biologi menggunakan mikroskop untuk memerhati sel tumbuhan. Imej yang terhasil melalui mikroskop mempunyai saiz beribu-ribu kali ganda lebih besar daripada objeknya. Adakah objek dan imej yang terhasil memenuhi sifat keserupaan?

Standard Pembelajaran

Membuat perkaitan antara keserupaan dengan pembesaran dan seterusnya memerihalkan pembesaran menggunakan pelbagai perwakilan.

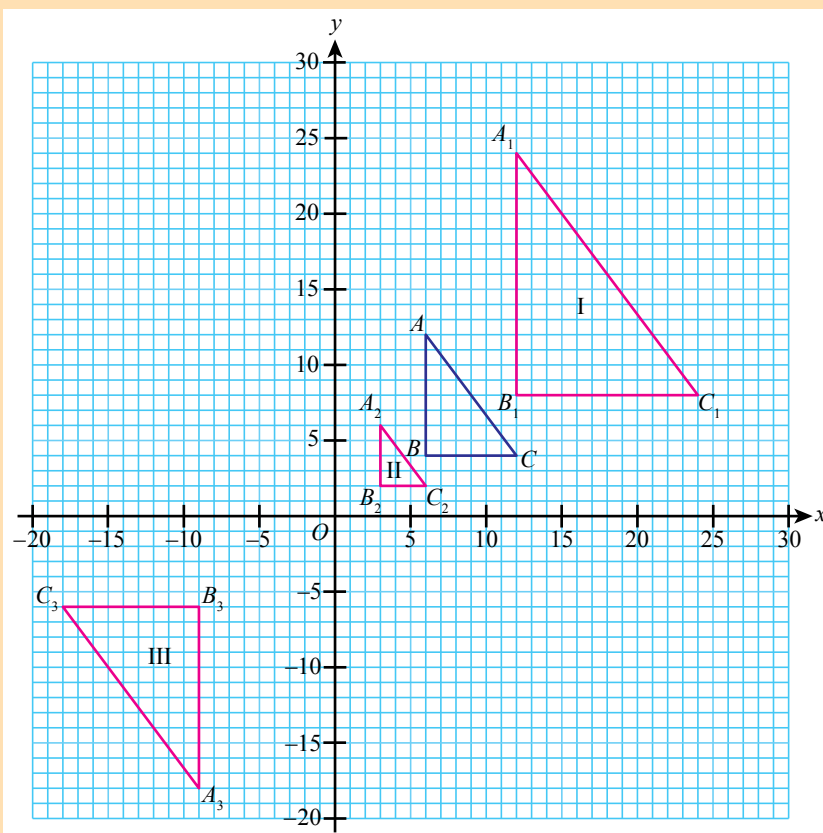
MOBILISASI MINDA 4 Berpasangan

Tujuan: Membuat perkaitan antara keserupaan dengan pembesaran.

Bahan: Pembaris dan protractor

Langkah:

- Perhatikan rajah di bawah dengan $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$ dan $\Delta A_3B_3C_3$ masing-masing ialah imej bagi ΔABC di bawah suatu pembesaran.



- Sambungkan titik-titik yang sepadan untuk semua imej segi tiga. Tandakan titik persilangan bagi ketiga-tiga garis lurus itu sebagai titik P .

3. Ukur panjang, dalam unit, sisi dan sudut bagi setiap segi tiga dan lengkapkan jadual yang berikut.

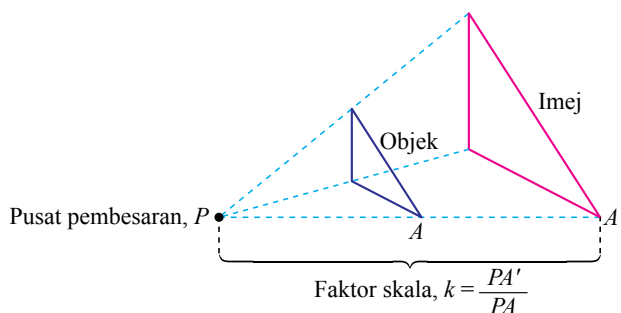
Segi tiga	Nisbah panjang sisi sepadan	Nisbah jarak bucu dari titik P	Sudut sepadan sama? (Ya / Tidak)	Serupa dengan segi tiga ABC ? (Ya / Tidak)
I	$\frac{A_1B_1}{AB} =$	$\frac{A_1P}{AP} =$		
	$\frac{B_1C_1}{BC} =$	$\frac{B_1P}{BP} =$		
	$\frac{A_1C_1}{AC} =$	$\frac{C_1P}{CP} =$		
II	$\frac{A_2B_2}{AB} =$	$\frac{A_2P}{AP} =$		
	$\frac{B_2C_2}{BC} =$	$\frac{B_2P}{BP} =$		
	$\frac{A_2C_2}{AC} =$	$\frac{C_2P}{CP} =$		
III	$\frac{A_3B_3}{AB} =$	$\frac{A_3P}{AP} =$		
	$\frac{B_3C_3}{BC} =$	$\frac{B_3P}{BP} =$		
	$\frac{A_3C_3}{AC} =$	$\frac{C_3P}{CP} =$		

Perbincangan:

1. Apakah ulasan anda tentang nisbah panjang sisi sepadan dan saiz sudut sepadan antara segi tiga ABC dengan imejnya?
2. Tentukan sama ada setiap imej serupa dengan segi tiga ABC .
3. Buat kesimpulan daripada hasil dapatan anda.

Hasil daripada Mobilisasi Minda 4, objek dan imej di bawah suatu pembesaran adalah serupa.

Pembesaran ialah suatu transformasi dengan semua titik objek bergerak dari satu titik tetap dengan satu nisbah malar. Titik tetap itu dikenali sebagai **pusat pembesaran** dan nisbah malar itu dikenali sebagai **faktor skala**.



Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB503 untuk meneroka faktor skala bagi pembesaran.



Secara umumnya, faktor skala k , bagi suatu pembesaran dapat ditentukan seperti berikut.

$$k = \frac{\text{jarak titik sepadan imej dari } P}{\text{jarak titik objek dari } P}$$

atau

$$k = \frac{\text{panjang sisi sepadan imej}}{\text{panjang sisi objek}}$$

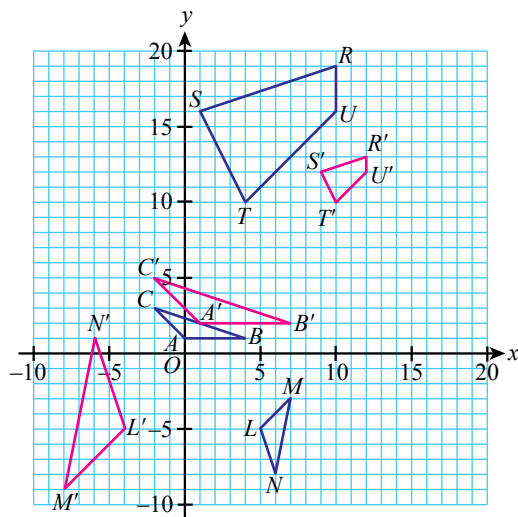
Nilai faktor skala yang berbeza mempunyai kesan pembesaran yang berbeza:

Faktor skala, k	Saiz imej	Kedudukan imej terhadap pusat pembesaran P	
$k > 1$	Lebih besar daripada saiz objek	Berada di sebelah yang sama dengan objek	
$k = 1$	Sama saiz dengan objek	Berada di sebelah yang sama dengan objek	
$0 < k < 1$	Lebih kecil daripada saiz objek	Berada di sebelah yang sama dengan objek	
$-1 < k < 0$	Lebih kecil daripada saiz objek	Berada di sebelah yang bertentangan dengan objek	
$k = -1$	Sama saiz dengan objek	Berada di sebelah yang bertentangan dengan objek	
$k < -1$	Lebih besar daripada saiz objek	Berada di sebelah yang bertentangan dengan objek	

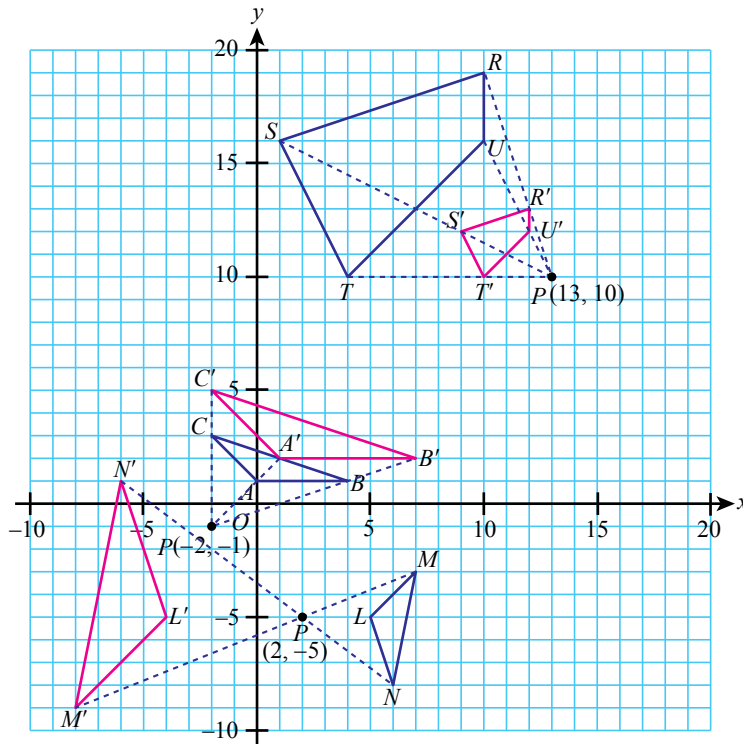
Contoh 8

Rajah di sebelah menunjukkan tiga objek dan imejnya di bawah transformasi pembesaran. Perihalkan pembesaran dengan menentukan faktor skala dan pusat pembesaran untuk yang berikut.

- objek ABC
- objek $RSTU$
- objek LMN



Penyelesaian:



$$\begin{aligned} \text{(a) Faktor skala} &= \frac{A'B'}{AB} \\ &= \frac{6}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$k > 1$, imej lebih besar daripada objek

$A'B'C'$ ialah imej bagi ABC di bawah suatu pembesaran pada pusat $(-2, -1)$ dengan faktor skala $\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{(b) Faktor skala} &= \frac{U'R'}{UR} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$0 < k < 1$, imej lebih kecil daripada objek

$R'S'T'U'$ ialah imej bagi $RSTU$ di bawah suatu pembesaran pada pusat $(13, 10)$ dengan faktor skala $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{(c) Faktor skala} &= \frac{\text{jarak } L' \text{ dari pusat pembesaran}}{\text{jarak } L \text{ dari pusat pembesaran}} \\ &= -\frac{6}{3} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Tanda negatif menunjukkan imej berada di sebelah yang bertentangan dengan objek.
 $k < -1$, imej lebih besar daripada objek.

$L'M'N'$ ialah imej bagi LMN di bawah suatu pembesaran pada pusat $(2, -5)$ dengan faktor skala -2 .

TiP Bestari

Pusat pembesaran dapat ditentukan daripada titik persilangan antara semua garis lurus yang menyambungkan setiap pasangan titik sepadan.

Buletin Ilmiah

Dalam transformasi pembesaran, setiap pasang sisi sepadan antara objek dengan imej adalah selari.

TiP Bestari

Apabila memerihalkan suatu pembesaran, kita perlu menyatakan **pusat pembesaran** dan **faktor skala**.

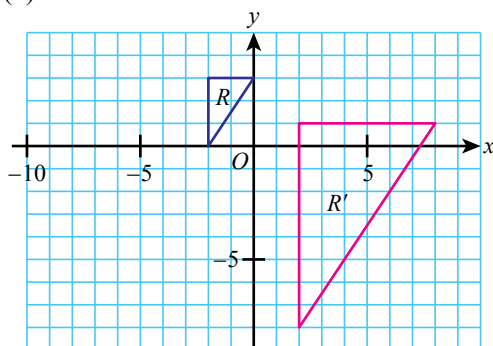
TiP Bestari

Faktor skala yang negatif akan menyebabkan pembesaran berlaku di sebelah pusat pembesaran yang bertentangan dengan objek dan imej songsang dihasilkan.

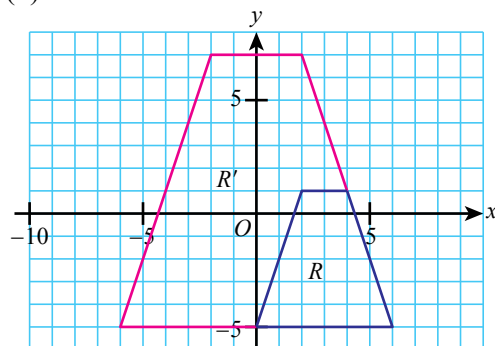
Latih Kendiri 5.2b

1. Diberi R' ialah imej bagi objek R . Perihalkan pembesaran bagi setiap yang berikut.

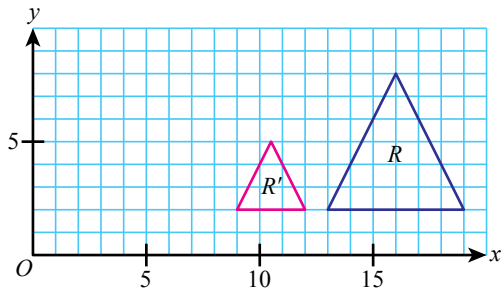
(a)



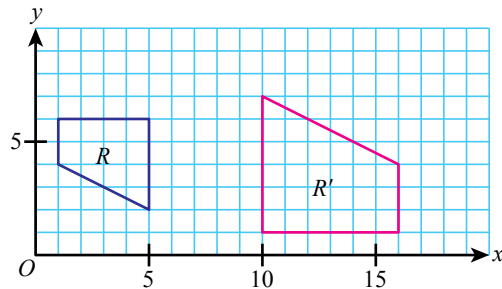
(b)



(c)

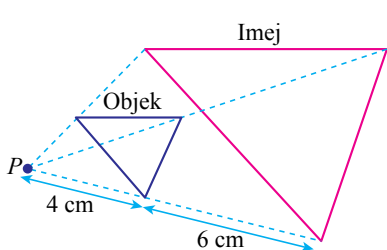


(d)

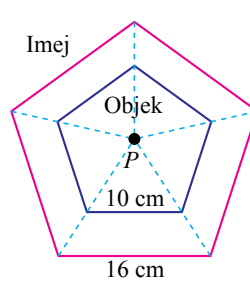


2. Perihalkan pembesaran dalam setiap yang berikut.

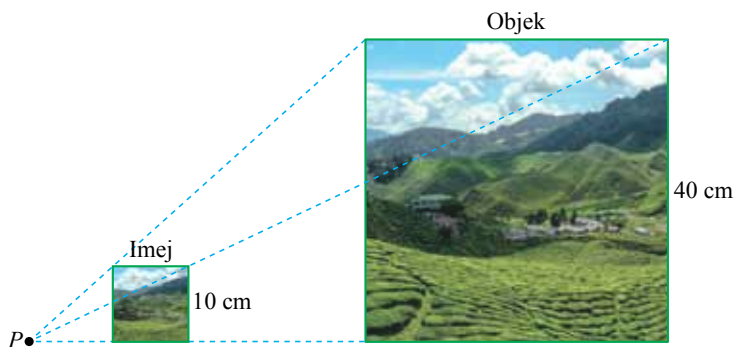
(a)



(b)



(c)

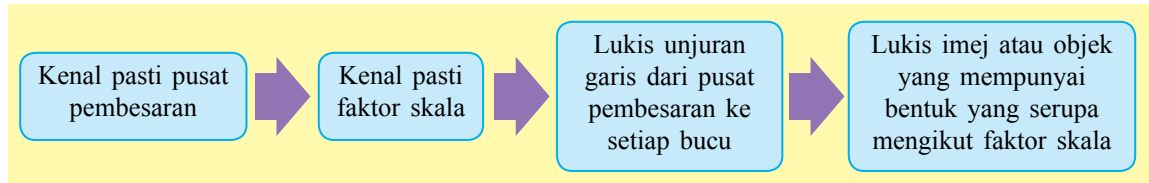


Bagaimanakah menentukan imej dan objek bagi suatu pembesaran?

Carta alir di bawah menunjukkan langkah-langkah untuk menentukan imej atau objek bagi suatu pembesaran.

Standard Pembelajaran

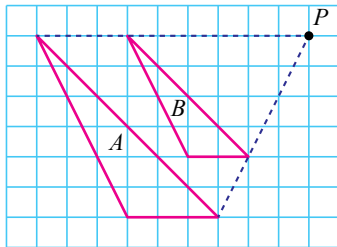
Menentukan imej dan objek bagi suatu pembesaran.



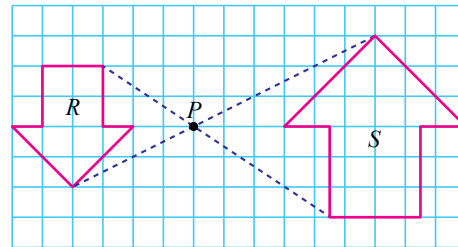
Contoh 9

Berdasarkan faktor skala yang diberi, tentukan objek dan imej bagi setiap pembesaran berikut.

(a) Faktor skala, $k = \frac{2}{3}$



(b) Faktor skala, $k = -1.5$



Penyelesaian:

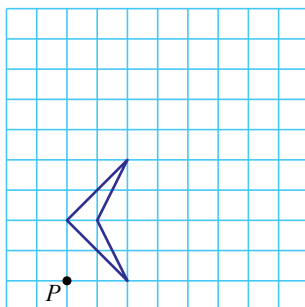
(a) Apabila $k = \frac{2}{3}$, saiz imej lebih kecil daripada objek. A ialah objek dan B ialah imej.

(b) Apabila $k = -1.5$, saiz imej lebih besar daripada objek. R ialah objek dan S ialah imej.

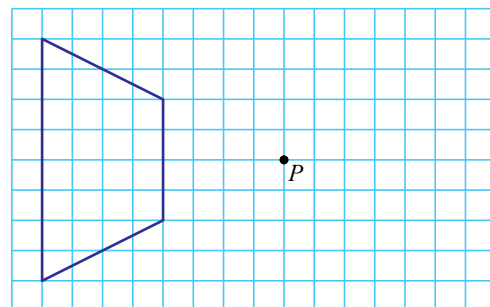
Contoh 10

Lukis imej bagi setiap objek yang berikut di bawah pembesaran pada pusat P , berdasarkan faktor skala berikut.

(a) $k = 2$

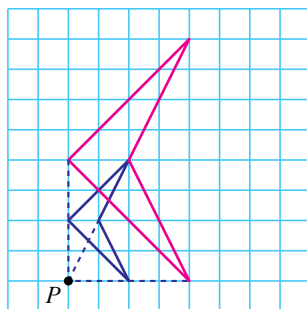


(b) $k = -\frac{3}{4}$

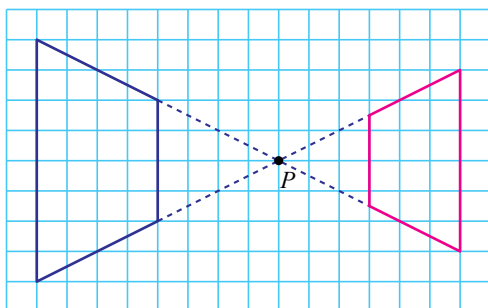


Penyelesaian:

- (a) Apabila $k = 2$, jarak setiap bucu imej dari P ialah 2 kali jarak bucu sepadan objek dari P pada arah yang sama.

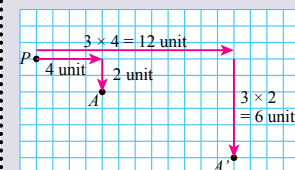


- (b) Apabila $k = -\frac{3}{4}$, jarak setiap bucu imej dari P ialah $\frac{3}{4}$ daripada jarak bucu sepadan objek dari P pada arah yang bertentangan.



TiP Bestari

Kita boleh menggunakan jarak mengufuk dan jarak mencancang untuk menentukan nisbah jarak suatu titik dari pusat pembesaran seperti contoh di bawah.



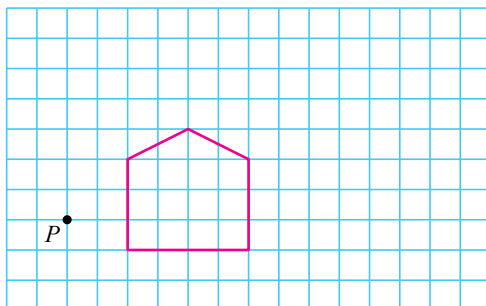
Diberi titik A ialah objek dan titik A' ialah imejnya, P ialah pusat pembesaran dan $k = 3$.

Apabila $k = 3$, jarak mencancang dan jarak mengufuk bagi A' dari P kepada A dari P adalah mengikut nisbah $3 : 1$.

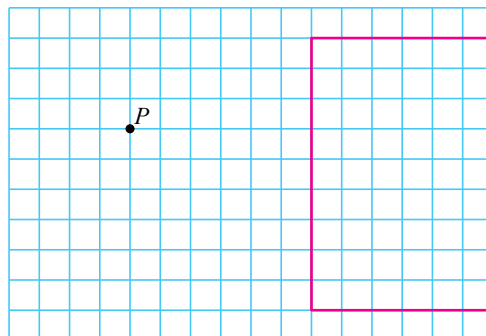
Contoh 11

Lukis objek bagi setiap imej yang berikut di bawah pembesaran pada pusat P , berdasarkan faktor skala berikut.

(a) $k = \frac{1}{2}$

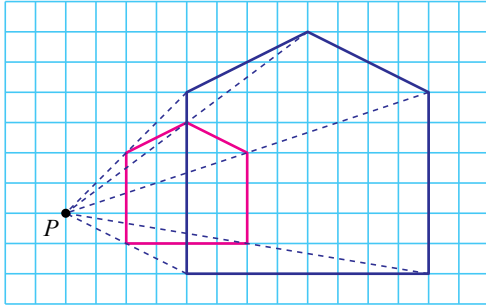


(b) $k = -3$

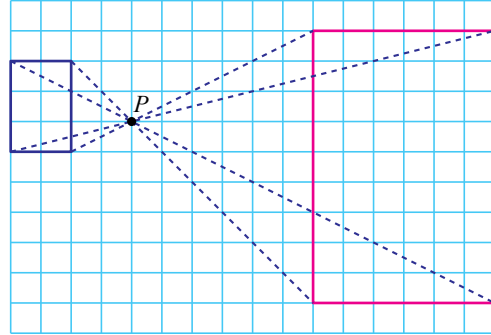


Penyelesaian:

- (a) Apabila $k = \frac{1}{2}$, jarak setiap bucu objek dari P ialah 2 kali jarak bucu sepadan imej dari P pada arah yang sama.



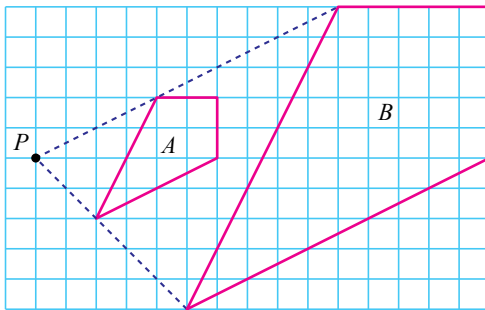
- (b) Apabila $k = -3$, jarak setiap bucu objek dari P ialah $\frac{1}{3}$ daripada jarak bucu sepadan imej dari P pada arah yang bertentangan.



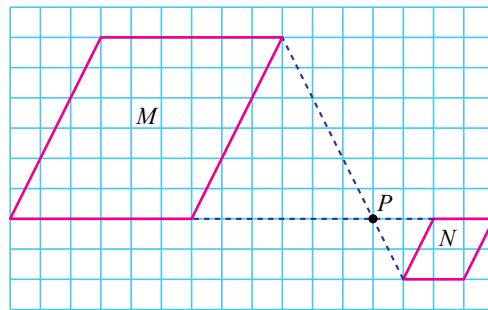
Latih Kendiri 5.2c

1. Berdasarkan faktor skala yang diberi, tentukan objek dan imej bagi pembesaran berikut.

- (a) Faktor skala, $k = \frac{5}{2}$

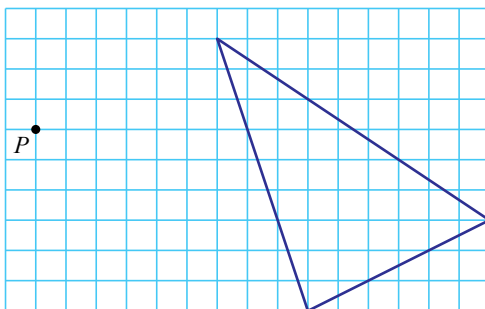


- (b) Faktor skala, $k = -3$

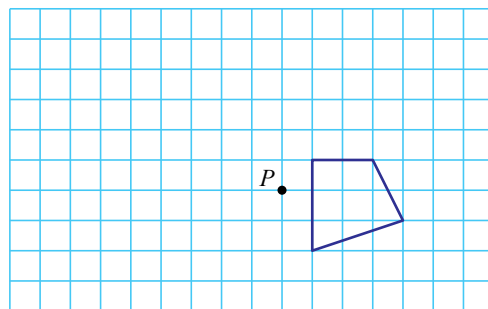


2. Lukis imej bagi setiap objek yang berikut di bawah pembesaran pada pusat P , berdasarkan faktor skala yang diberi.

- (a) $k = \frac{1}{3}$

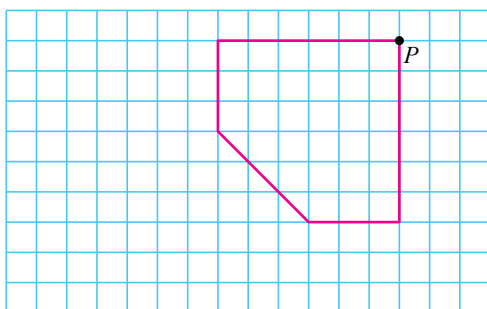


- (b) $k = -2$

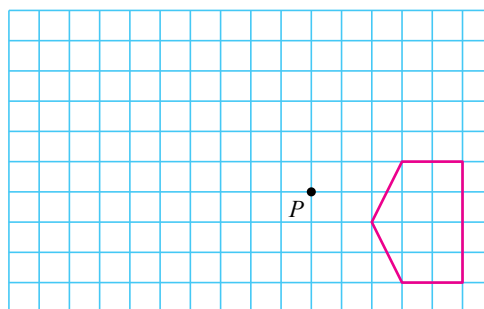


3. Lukis objek bagi setiap imej yang berikut di bawah pembesaran pada pusat P , berdasarkan faktor skala yang diberi.

(a) $k = \frac{3}{4}$



(b) $k = -\frac{1}{2}$



Apakah hubungan antara luas imej dengan luas objek bagi suatu pembesaran?

Semasa pembesaran, panjang setiap sisi yang sepadan berkadar secara tetap. Apakah hubungan antara luas imej dengan luas objek bagi suatu pembesaran?

Standard Pembelajaran

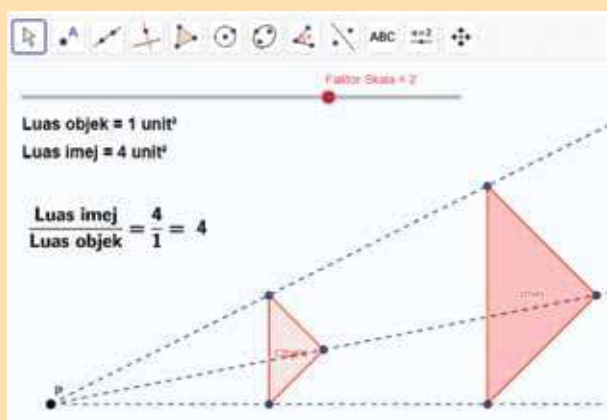
Membuat dan mengesahkan konjektur tentang hubungan antara luas imej dan luas objek bagi suatu pembesaran.

MOBILISASI MINDA 5 Berpasangan

Tujuan: Meneroka hubungan antara luas imej dengan luas objek bagi suatu pembesaran.

Langkah:

1. Buka fail GGB504 untuk aktiviti ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB504 untuk mendapatkan fail GeoGebra aktiviti ini.

2. Seret gelongsor 'Faktor Skala' kepada beberapa nilai yang berlainan untuk memerhatikan luas objek, luas imej dan nisbah luas imej kepada luas objek.

3. Seterusnya, lengkapkan jadual yang berikut.

Faktor skala, k	Luas objek (unit ²)	Luas imej (unit ²)	Nisbah luas imej kepada luas objek, $\frac{\text{luas imej}}{\text{luas objek}}$	k^2
$k = 2$	1	4	$\frac{4}{1} = 4$	$(2)^2 = 4$
$k = 3$				
$k = 4$				
$k = -1$				
$k = -2$				

Perbincangan:

1. Apakah perkaitan antara faktor skala dengan nisbah luas imej kepada luas objek?
2. Apakah hubungan antara luas imej dengan luas objek bagi suatu pembesaran?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 5, didapati bahawa $\frac{\text{luas imej}}{\text{luas objek}} = k^2$ dengan keadaan k ialah faktor skala.

Maka, kita dapat menentukan luas imej bagi suatu pembesaran dengan rumus:

$$\text{Luas imej} = k^2 \times \text{Luas objek}$$

Contoh 12

Jadual di bawah menunjukkan nilai luas objek, nilai luas imej dan nilai faktor skala yang berlainan di bawah pembesaran. Lengkapkan jadual tersebut.

	Luas objek	Luas imej	Faktor skala, k
(a)	5 cm ²	45 cm ²	
(b)	12 unit ²		$\frac{7}{2}$
(c)		100 m ²	-4

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad k^2 &= \frac{\text{luas imej}}{\text{luas objek}} \\
 &= \frac{45}{5} \\
 &= 9 \\
 k &= \sqrt{9} \\
 &= +3 \text{ atau } -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \left(\frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{\text{luas imej}}{12} \\
 \text{luas imej} &= \frac{49}{4} \times 12 \\
 &= 147 \text{ unit}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad (-4)^2 &= \frac{100}{\text{luas objek}} \\
 \text{luas objek} &= \frac{100}{16} \\
 &= 6.25 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Latih Kendiri 5.2d

1. Jadual di bawah menunjukkan nilai luas objek, nilai luas imej dan nilai faktor skala yang berlainan di bawah pembesaran. Lengkapkan jadual tersebut.

Luas objek	Luas imej	Faktor skala, k
18 unit ²	72 unit ²	
54 m ²		$\frac{1}{3}$
	31.25 cm ²	$\frac{5}{4}$

Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan pembesaran?

Contoh 13

Dalam rajah di sebelah, trapezium $AEFG$ ialah imej bagi trapezium $ABCD$ di bawah suatu pembesaran pada pusat A . Diberi bahawa luas kawasan berwarna ialah 168 cm², hitung

- (a) faktor skala bagi pembesaran itu,
(b) luas dalam cm² trapezium $AEFG$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \text{(a) Faktor skala, } k &= \frac{AE}{AB} \\
 &= \frac{20 + 16}{20} \\
 &= \frac{9}{5}
 \end{aligned}$$

- (b) Katakan luas trapezium $ABCD = L_1$
dan luas trapezium $AEFG = L_2$

$$\begin{aligned}
 L_2 - L_1 &= 168 \\
 L_2 - \frac{L_2}{\left(\frac{9}{5}\right)^2} &= 168
 \end{aligned}$$

$$L_2 - \frac{25}{81}L_2 = 168$$

$$\frac{56}{81}L_2 = 168$$

$$L_2 = 243$$

Maka, luas trapezium $AEFG = 243$ cm².

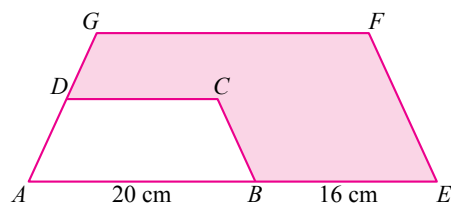
Luas imej = $k^2 \times$ Luas objek

$$L_2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \times L_1$$

$$L_1 = \frac{L_2}{\left(\frac{9}{5}\right)^2}$$

Standard Pembelajaran

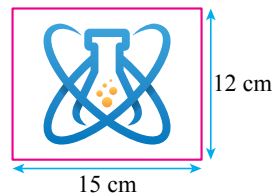
Menyelesaikan masalah yang melibatkan pembesaran.

**Langkah****Alternatif**

$$\begin{aligned}
 L_2 &= x \\
 L_1 &= \frac{x}{\left(\frac{9}{5}\right)^2} \\
 &= \frac{25}{81}x \\
 L_2 - L_1 &= 168 \\
 x - \frac{25}{81}x &= 168 \\
 \frac{56}{81}x &= 168 \\
 x &= 243 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Contoh 14

Rajah di bawah menunjukkan suatu logo berbentuk segi empat tepat yang dilukis oleh seorang ahli Persatuan STEM.



Pada hari keusahawanan sekolah, Persatuan STEM ingin menggantung sepanduk pada gerai jualan mereka. Sepanduk itu direka berdasarkan pembesaran ke atas logo. Jika luas sepanduk ialah 0.8 m^2 , berapakah ukuran panjang dan lebar sepanduk itu dalam cm?

Penyelesaian:

Luas logo = $15 \times 12 = 180 \text{ cm}^2$ dan luas sepanduk = $0.8 \text{ m}^2 = 8\,000 \text{ cm}^2$.

$$k^2 = \frac{\text{luas imej}}{\text{luas objek}}$$

$$= \frac{8\,000 \text{ cm}^2}{180 \text{ cm}^2}$$

$$= \frac{400}{9}$$

$$k = \frac{20}{3}$$

$$k = \frac{\text{panjang sisi sepadan imej}}{\text{panjang sisi objek}}$$

$$\frac{20}{3} = \frac{\text{Panjang}}{15}$$

$$\text{Panjang} = 15 \times \frac{20}{3}$$

$$= 100 \text{ cm}$$

$$\text{Lebar} = \frac{\text{Luas}}{\text{Panjang}}$$

$$= \frac{8\,000}{100}$$

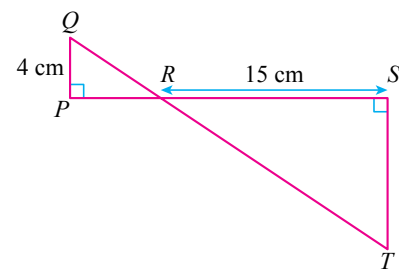
$$= 80 \text{ cm}$$

Ukuran sepanduk itu ialah 100 cm panjang dan 80 cm lebar.

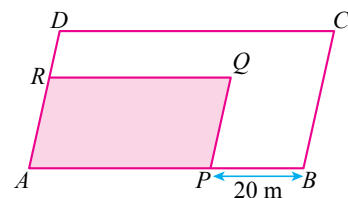
Latih Kendiri 5.2e

1. Rajah di sebelah menunjukkan dua segi tiga bersudut tegak dengan keadaan $\triangle PQR$ ialah imej bagi $\triangle STR$ di bawah suatu pembesaran. Diberi bahawa $5PR = 2RS$. Hitung

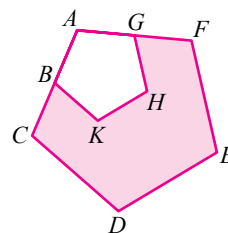
- faktor skala bagi pembesaran itu,
- luas dalam cm^2 seluruh rajah.



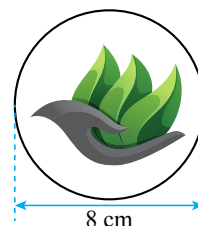
2. Rajah di sebelah menunjukkan pelan sebuah taman bunga yang berbentuk segi empat selari. Diberi $ABCD$ ialah imej bagi $APQR$ dengan pembesaran pada pusat A , dan luas taman bunga itu ialah $1\,350 \text{ m}^2$. Jika luas kawasan berwarna ialah 600 m^2 , hitung panjang, dalam m, AP .



3. Dalam rajah di sebelah, pentagon $ACDEF$ ialah imej bagi pentagon $ABKHG$ di bawah suatu pembesaran dengan bucu A merupakan pusat pembesaran. Diberi bahawa B ialah titik tengah sisi AC dan luas bagi pentagon $ABKHG$ ialah 17 cm^2 . Hitung luas dalam cm^2 kawasan berwarna.



4. Rajah di sebelah menunjukkan lencana berbentuk bulatan yang digunakan dalam suatu program perlindungan alam sekitar yang dilancarkan oleh Persatuan Alam Sekitar. Persatuan ini ingin melukis mural pada dinding sebuah bangunan menggunakan transformasi pembesaran ke atas lencana tersebut. Diberi bahawa luas lukisan mural itu ialah $4\pi \text{ m}^2$, berapakah faktor skala bagi pembesaran itu?



5.3 Gabungan Transformasi

Bagaimanakah menentukan imej dan objek bagi suatu gabungan transformasi?

Kita telah mempelajari 4 jenis transformasi seperti ditunjukkan dalam contoh-contoh di bawah dengan P' ialah imej bagi P di bawah transformasi yang dinyatakan.

Standard Pembelajaran

Menentukan imej dan objek bagi suatu gabungan transformasi.

Translasi	Pantulan	Putaran	Pembesaran
Translasi $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$	Pantulan pada garis $x = 5$	Putaran 90° lawan arah jam pada pusat $(6, 5)$	Pembesaran pada pusat $(1, 9)$ dengan faktor skala 3

Untuk menentukan objek apabila imej diberi, transformasi translasi perlu dilakukan secara arah bertentangan contohnya

translasi $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ menjadi $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bagi transformasi putaran,

contohnya putaran ikut arah jam akan menjadi putaran lawan arah jam. Bagi transformasi pembesaran, contohnya pembesaran dengan faktor skala $k = 2$ akan menjadi salingan iaitu

pembesaran dengan faktor skala $k = \frac{1}{2}$.

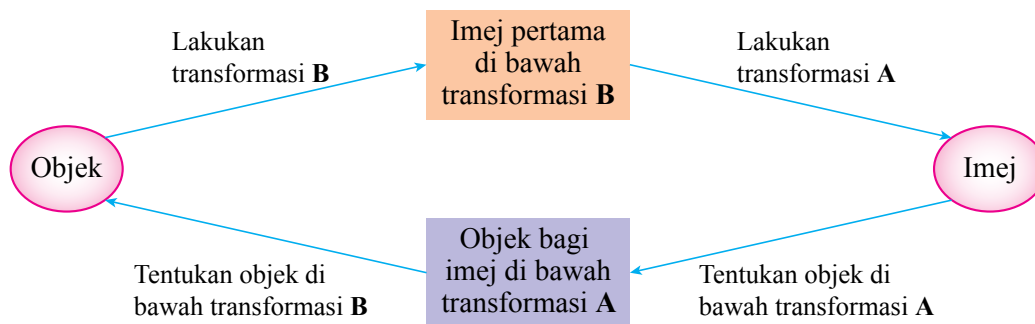


Mengapakah transformasi pantulan tidak berubah seperti tiga transformasi lain apabila mencari objek jika imej diberi?

Suatu objek boleh dilakukan lebih daripada satu transformasi dan akan menghasilkan imej berdasarkan transformasi yang terlibat. Secara umumnya, gabungan transformasi **A** dan transformasi **B** boleh ditulis sebagai transformasi **AB** atau transformasi **BA** mengikut tertib transformasi yang dikehendaki.

Gabungan transformasi **AB** bermaksud transformasi **B** diikuti dengan transformasi **A**.

Rajah di bawah menunjukkan langkah-langkah untuk menentukan imej atau objek bagi suatu gabungan transformasi **AB**.



Contoh 15

Rajah di sebelah menunjukkan beberapa segi tiga dilukis pada satah Cartes. Diberi bahawa transformasi

P = translasi $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

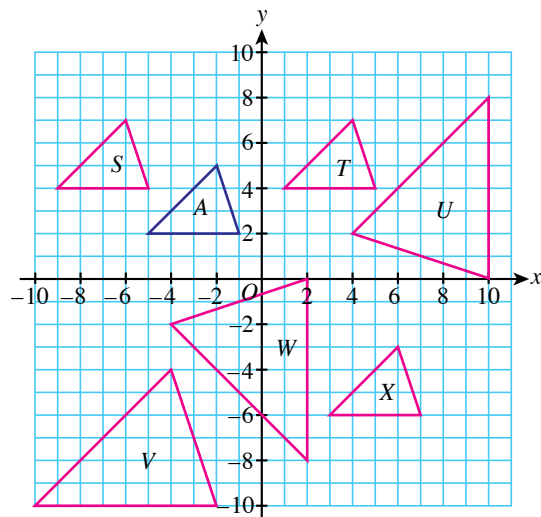
Q = putaran 90° lawan arah jam pada pusat $(3, 4)$

R = pembesaran pada pusat $(8, 0)$ dengan faktor skala 2

Tentukan imej bagi segi tiga **A** di bawah gabungan transformasi

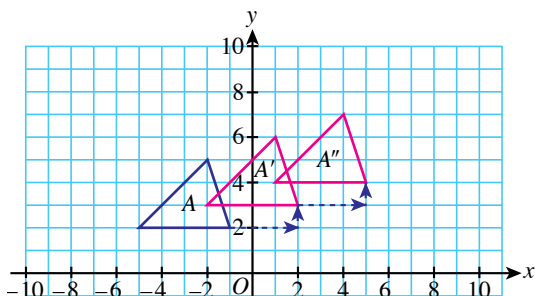
(a) **P**²

(b) **RQ**



Penyelesaian:

- (a) Gabungan transformasi P^2 bermaksud transformasi P berlaku 2 kali secara berturutan.

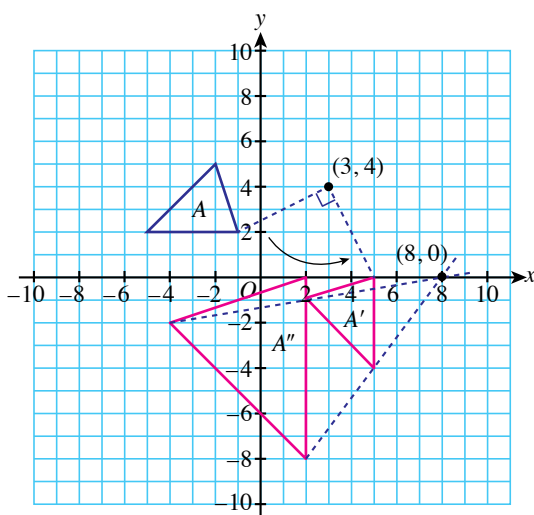


A' ialah imej bagi A di bawah transformasi P .
 A'' ialah imej bagi A' di bawah transformasi P .

$$A \xrightarrow{P} A' \xrightarrow{P} A''$$

Imej bagi segi tiga A di bawah gabungan transformasi P^2 ialah segi tiga T .

- (b) Gabungan transformasi RQ bermaksud transformasi Q diikuti transformasi R .



A' ialah imej bagi A di bawah transformasi Q .
 A'' ialah imej bagi A' di bawah transformasi R .

$$A \xrightarrow{Q} A' \xrightarrow{R} A''$$

Imej bagi segi tiga A di bawah gabungan transformasi RQ ialah segi tiga W .

Contoh 16

Dalam rajah di sebelah, trapezium G'' ialah imej bagi suatu objek di bawah gabungan transformasi. Diberi bahawa transformasi

T = pembesaran pada pusat $(1, 4)$ dengan faktor skala -2

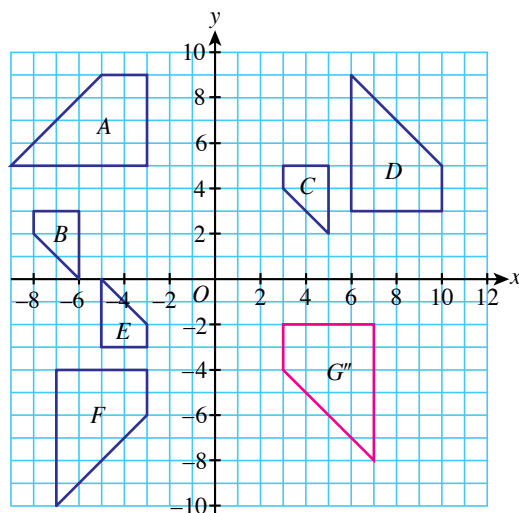
V = putaran 180° pada asalan

W = pantulan pada garis $y = 1$

Tentukan objek bagi trapezium G'' di bawah gabungan transformasi

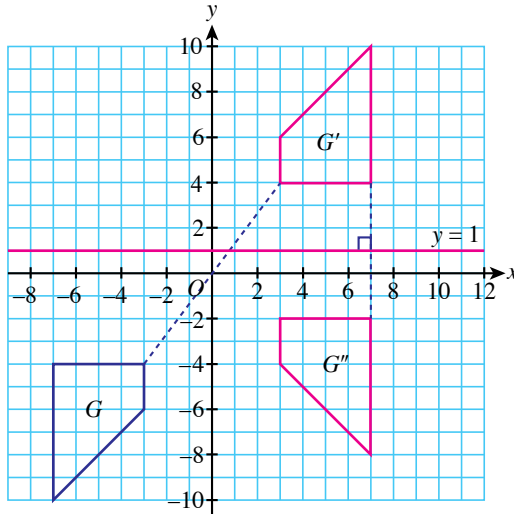
- (a) WV

- (b) VT



Penyelesaian:

- (a) Diberi imej untuk mencari objek, maka transformasi **W** diikuti transformasi **V**.

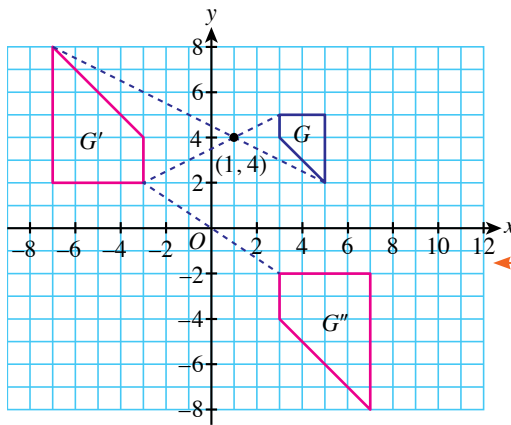


G' ialah objek bagi G'' di bawah transformasi **W**.
 G ialah objek bagi G' di bawah transformasi **V**.

$$G'' \xrightarrow{W} G' \xrightarrow{V} G$$

Objek bagi trapezium G'' di bawah gabungan transformasi **WV** ialah trapezium **F**.

- (b) Diberi imej untuk mencari objek, maka transformasi **V** diikuti transformasi **T**.



G' ialah objek bagi G'' di bawah transformasi **V**.
 G ialah objek bagi G' di bawah transformasi **T**.

$$G'' \xrightarrow{V} G' \xrightarrow{T} G$$

Untuk menentukan objek G di bawah transformasi **T**, lakukan pembesaran dengan faktor skala $k = -\frac{1}{2}$ pada imej G' .

Objek bagi trapezium G'' di bawah gabungan transformasi **VT** ialah trapezium **C**.

Contoh 17

Rajah di sebelah menunjukkan titik P dan titik Q pada satah Cartes. Diberi bahawa transformasi

A = translasi $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

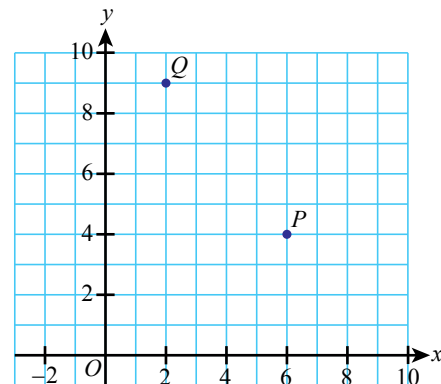
B = pantulan pada garis $y = x$

C = putaran 90° ikut arah jam pada pusat $(5, 8)$

- (a) Tentukan imej bagi titik P di bawah gabungan transformasi

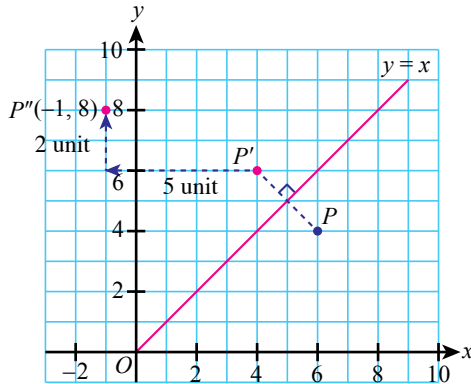
(i) **AB** (ii) **BC**

- (b) Diberi bahawa titik Q ialah imej bagi titik K di bawah transformasi **CA**. Tentukan titik K .



Penyelesaian:

- (a) (i) Gabungan transformasi **AB** bermaksud transformasi **B** diikuti transformasi **A**.

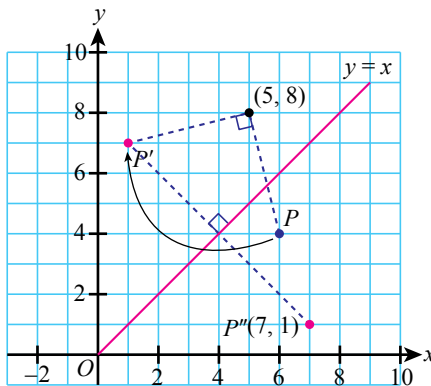


P' ialah imej bagi P di bawah transformasi **B**.
 P'' ialah imej bagi P' di bawah transformasi **A**.

$$P \xrightarrow{\mathbf{B}} P' \xrightarrow{\mathbf{A}} P''$$

Maka, imej bagi titik P di bawah gabungan transformasi **AB** ialah $P''(-1, 8)$.

- (ii) Gabungan transformasi **BC** bermaksud transformasi **C** diikuti transformasi **B**.

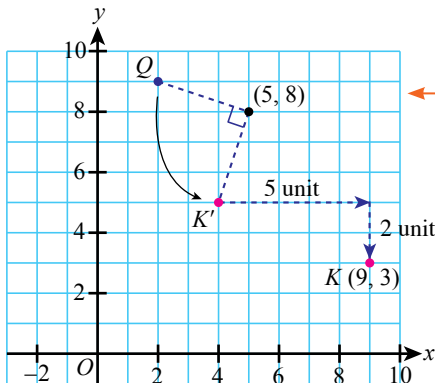


P' ialah imej bagi P di bawah transformasi **C**.
 P'' ialah imej bagi P' di bawah transformasi **B**.

$$P \xrightarrow{\mathbf{C}} P' \xrightarrow{\mathbf{B}} P''$$

Maka, imej bagi titik P di bawah gabungan transformasi **BC** ialah $P''(7, 1)$.

- (b) Diberi imej untuk mencari objek, maka transformasi **C** diikuti transformasi **A**.



Untuk menentukan objek K' di bawah transformasi **C**, lakukan putaran lawan arah jam pada imej Q .
 Untuk menentukan objek K di bawah transformasi **A**, lakukan translasi $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ pada imej K' .

Tip Bestari

Semasa menentukan objek, tertib transformasi dipertimbangkan secara songsang dengan tertib menentukan imej di bawah gabungan transformasi yang sama.

K' ialah objek bagi Q di bawah transformasi **C**.
 K ialah objek bagi K' di bawah transformasi **A**.

$$Q \xrightarrow{\mathbf{C}} K' \xrightarrow{\mathbf{A}} K$$

Maka, $K(9, 3)$

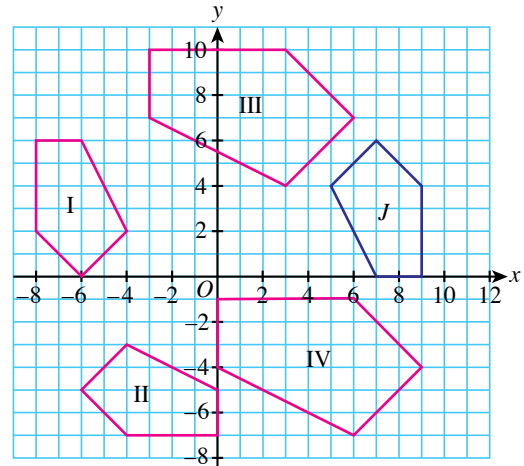
Latih Kendiri 5.3a

1. Rajah di sebelah menunjukkan beberapa pentagon dilukis pada suatu satah Cartes. Diberi bahawa transformasi

A = pantulan pada garis $y = x$
B = putaran 180° pada pusat $(1, 0)$
C = pembesaran pada pusat $(6, 7)$ dengan faktor skala $\frac{3}{2}$

Tentukan imej bagi pentagon J di bawah gabungan transformasi

- (a) **AB**
 (b) **CA**



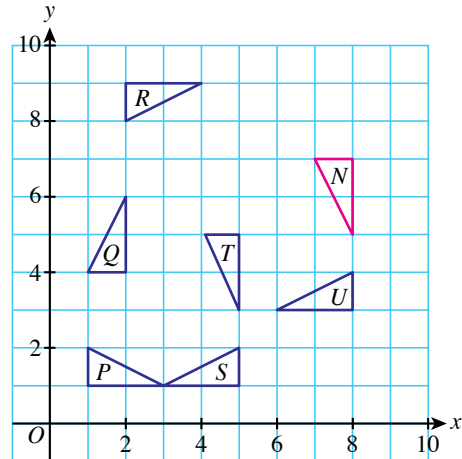
2. Dalam rajah di sebelah, segi tiga bersudut tegak N ialah imej bagi suatu objek di bawah gabungan transformasi. Diberi bahawa transformasi

A = translasi $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

B = putaran 270° ikut arah jam pada pusat $(6, 5)$
C = pantulan pada garis $x + y = 6$

Tentukan objek bagi segi tiga N di bawah gabungan transformasi

- (a) **AC**
 (b) **BA**



3. Diberi bahawa transformasi

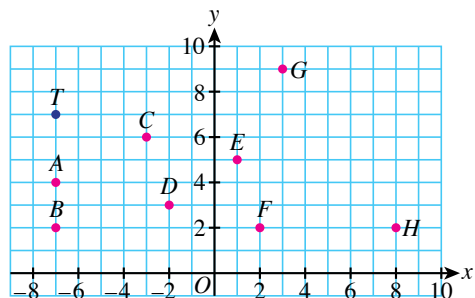
U = translasi $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

V = pantulan pada garis $x = 1$

W = putaran 90° lawan arah jam pada pusat $(5, 5)$

Rajah di sebelah menunjukkan beberapa titik dilukis pada suatu satah Cartes.

- (a) Tentukan imej bagi titik T di bawah gabungan transformasi
 (i) **U**²
 (ii) **WV**
 (b) Diberi H ialah imej bagi suatu titik di bawah transformasi **UV**. Tentukan titik itu.



Apakah kesan sifat kalis tukar tertib terhadap gabungan transformasi?

Diberi bahawa **P** dan **Q** ialah dua transformasi yang berlainan. Adakah imej di bawah gabungan transformasi **PQ** sama dengan imej di bawah gabungan transformasi **QP**?

Standard Pembelajaran

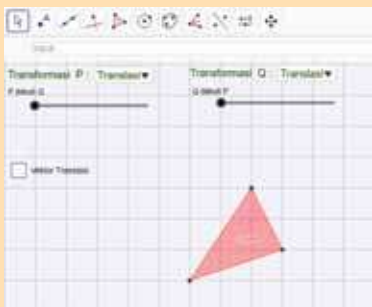
Membuat dan menentukan konjektur tentang sifat kalis tukar tertib terhadap gabungan transformasi.

MOBILISASI MINDA 6 Berpasangan

Tujuan: Membuat dan menentukan konjektur tentang sifat kalis tukar tertib terhadap gabungan transformasi.

Langkah:

1. Buka fail GGB505 untuk aktiviti ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB505 untuk mendapatkan fail GeoGebra aktiviti ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/LKBab5ii untuk mendapatkan lembaran kerja aktiviti ini.

2. Pada menu, pilih Transformasi P dan Transformasi Q yang dikehendaki.
3. Seret gelongsor 'P diikuti Q' dan 'Q diikuti P' bergilir-gilir untuk memerhatikan imej yang terhasil. Adakah imej yang dihasilkan oleh 'P diikuti Q' dan 'Q diikuti P' adalah sama?
4. Buka lembaran kerja untuk aktiviti ini. Lengkapkan berdasarkan penerokaan anda.

Transformasi P	Huraian transformasi P	Transformasi Q	Huraian transformasi Q	Imej yang terhasil bagi 'P diikuti Q' dan 'Q diikuti P' adalah sama?
Translasi		Translasi		
Translasi		Pantulan		

Perbincangan:

1. Nyatakan sama ada setiap gabungan dua transformasi mempunyai sifat kalis tukar tertib.
2. Apakah kesimpulan anda tentang sifat kalis tukar tertib terhadap gabungan transformasi?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 6, didapati bahawa kebanyakan imej yang dihasilkan oleh gabungan transformasi **PQ** adalah tidak sama dengan imej yang dihasilkan oleh gabungan transformasi **QP**.

Secara umumnya;

- Suatu gabungan transformasi **AB** mematuhi sifat kalis tukar tertib jika imej di bawah gabungan transformasi **AB** dan gabungan transformasi **BA** adalah sama.
- Suatu gabungan transformasi **AB** tidak mematuhi sifat kalis tukar tertib jika imej di bawah gabungan transformasi **AB** dan gabungan transformasi **BA** adalah tidak sama.

Contoh 18

Rajah di sebelah menunjukkan suatu objek pada satah Cartes. Diberi bahawa transformasi

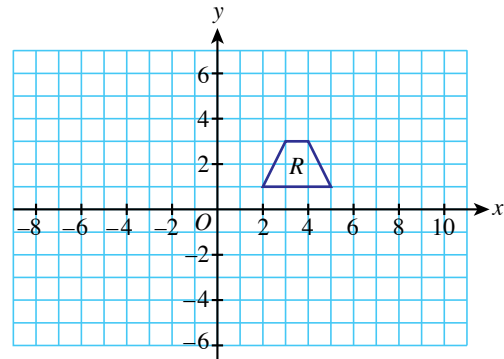
$$\mathbf{A} = \text{translasi} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B}$ = pantulan pada paksi-y

$\mathbf{C}$ = putaran 180° pada asalan

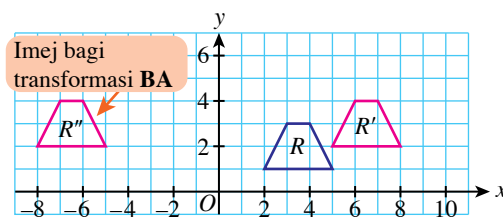
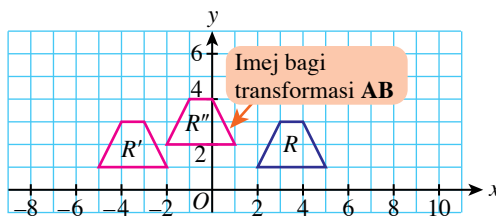
Tentukan sama ada setiap gabungan transformasi yang berikut mematuhi sifat kalis tukar tertib.

- Gabungan transformasi $\mathbf{AB}$
- Gabungan transformasi $\mathbf{BC}$



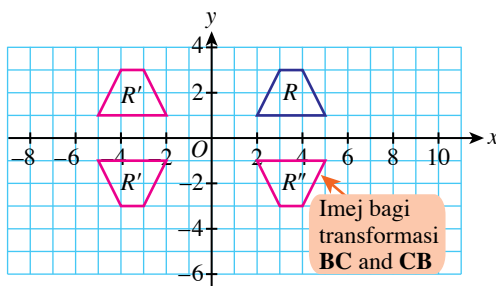
Penyelesaian:

(a)



Imej di bawah gabungan transformasi $\mathbf{AB}$ dan $\mathbf{BA}$ adalah tidak sama, maka gabungan transformasi $\mathbf{AB}$ tidak mematuhi sifat kalis tukar tertib.

(b)



Imej di bawah gabungan transformasi $\mathbf{BC}$ dan $\mathbf{CB}$ adalah sama, maka gabungan transformasi $\mathbf{BC}$ mematuhi sifat kalis tukar tertib.

Latih Kendiri 5.3b

1. Rajah di sebelah menunjukkan suatu objek pada satah Cartes. Diberi bahawa transformasi

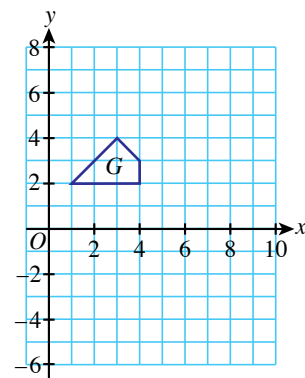
$\mathbf{P}$ = pembesaran pada asalan dengan faktor skala 2

$\mathbf{Q}$ = putaran 90° ikut arah jam pada asalan

$$\mathbf{R} = \text{translasi} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Tentukan sama ada setiap gabungan transformasi yang berikut mematuhi sifat kalis tukar tertib.

- Gabungan transformasi $\mathbf{PQ}$
- Gabungan transformasi $\mathbf{PR}$

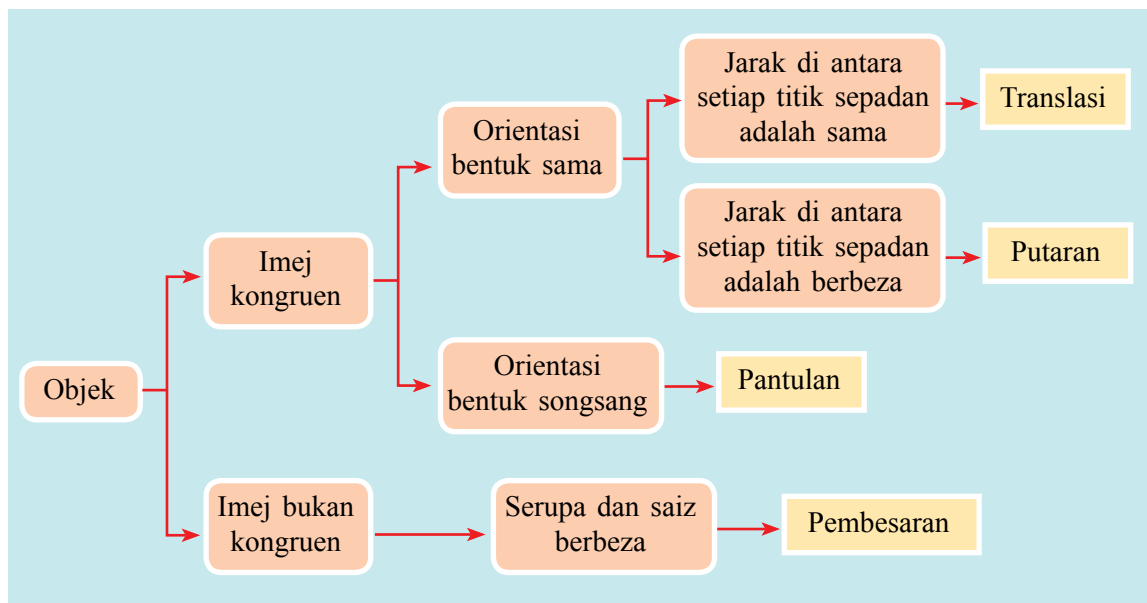


Bagaimanakah memerihalkan gabungan transformasi?

Kita dapat memerihalkan suatu transformasi berdasarkan sifat-sifat yang terdapat pada imej. Rajah di bawah menunjukkan kekunci untuk memerihalkan suatu transformasi.

Standard Pembelajaran

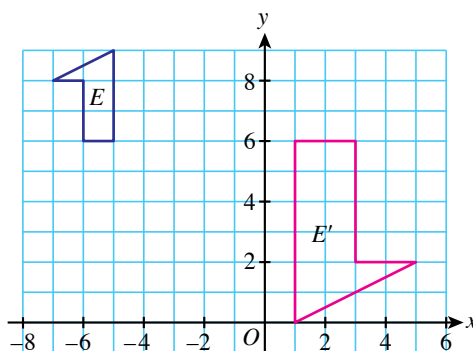
Memerihalkan gabungan transformasi.



Semasa memerihalkan gabungan transformasi **AB**, kita perlu mengikut tertibnya, iaitu memerihalkan transformasi **B** dahulu diikuti transformasi **A**.

Contoh 19

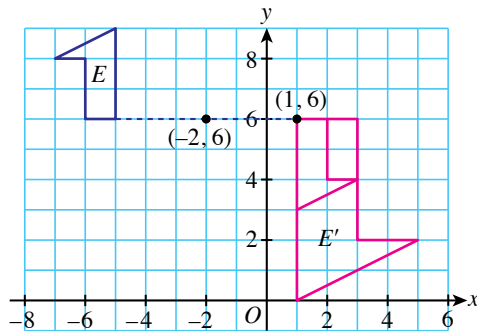
Dalam rajah di bawah, E' ialah imej bagi objek E di bawah gabungan transformasi **ST**.



- Perihalkan transformasi
 - T**
 - S**
- Seterusnya, perihalkan satu transformasi tunggal yang setara dengan gabungan transformasi **ST**.

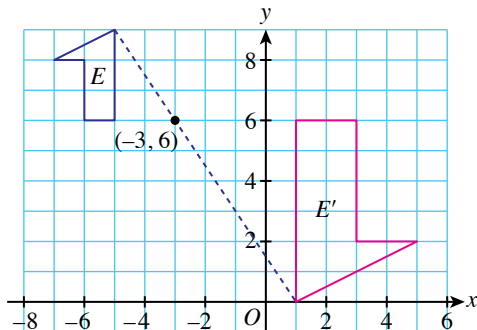
Penyelesaian:

(a)



- (i) Transformasi **T** ialah putaran 180° pada pusat $(-2, 6)$.
- (ii) Transformasi **S** ialah pembesaran pada pusat $(1, 6)$ dengan faktor skala 2.

(b)

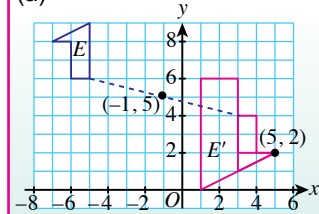


Transformasi tunggal yang setara dengan gabungan transformasi **ST** ialah pembesaran pada pusat $(-3, 6)$ dengan faktor skala -2 .

Langkah

Alternatif

(a)



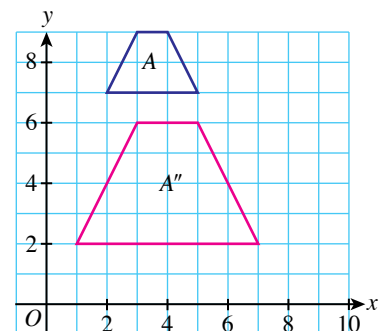
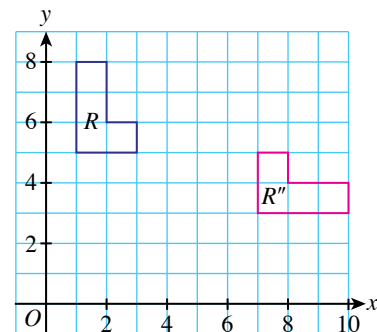
- (i) Transformasi **T** ialah putaran 180° pada pusat $(-1, 5)$.
- (ii) Transformasi **S** ialah pembesaran pada pusat $(5, 2)$ dengan faktor skala 2.

Buletin Ilmiah

Bukan semua gabungan transformasi dapat diperihalkan dalam suatu transformasi tunggal.

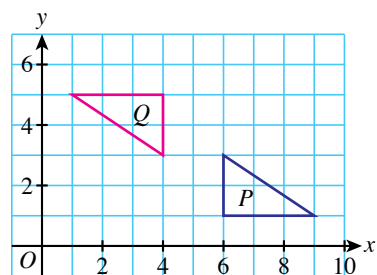
Latih Kendiri 5.3c

- Dalam rajah di sebelah, R'' ialah imej bagi objek R di bawah gabungan transformasi **AB**. Perihalkan transformasi **A** dan transformasi **B**.
- Dalam rajah di sebelah, A'' ialah imej bagi objek A di bawah gabungan transformasi **PQ**. Perihalkan transformasi **P** dan transformasi **Q**.



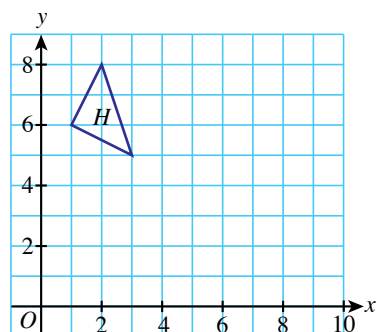
3. Diberi bahawa transformasi **A** ialah pantulan pada garis $x = 5$ dan Q ialah imej bagi P di bawah gabungan transformasi **AB**. Perihalkan

- transformasi **B**,
- satu transformasi tunggal yang setara dengan gabungan transformasi **AB**.



4. Diberi bahawa transformasi **M** ialah putaran 90° ikut arah jam pada pusat $(4, 4)$ dan transformasi **N** ialah pantulan pada garis $x = 4$.

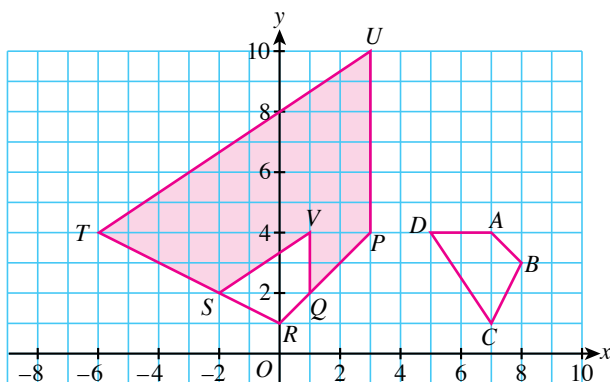
- Lukis imej bagi objek H di bawah gabungan transformasi **MN**.
- Seterusnya, perihalkan satu transformasi tunggal yang setara dengan gabungan transformasi **MN**.



Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan gabungan transformasi?

Contoh 20

Rajah di bawah menunjukkan peta bagi suatu kawasan hutan lipur. Kawasan berwarna merupakan habitat sekawan hidupan liar. Kawasan sisi empat $ABCD$ dan $QRSV$ merupakan pondok pemerhatian aktiviti hidupan liar.



Konsep transformasi digunakan untuk membina pondok pemerhatian tersebut dengan keadaan $ABCD$ ialah imej bagi $PRTU$ di bawah gabungan transformasi **UV**.

- Perihalkan selengkapnya transformasi
 - V**
 - U**
- Diberi luas pondok pemerhatian $ABCD$ ialah 4.5 m^2 , hitung luas dalam m^2 kawasan berwarna.

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan gabungan transformasi.

Oh! Malaysiaku

Mengikut Akta Pemuliharaan Hidupan Liar 2010, hidupan liar bererti mana-mana spesies haiwan liar atau burung liar, sama ada yang dilindungi sepenuhnya atau yang dilindungi, vertebrata atau invertebrata, hidup atau mati, matang atau tidak matang dan sama ada boleh dijinakkan atau dibiakkan dalam kurungan atau tidak.

(Sumber: bit.do/AktaPemuliharaanHL)

(Dicapai pada 14 September 2020)

Penyelesaian:

- (a) (i) **V** ialah pembesaran pada pusat $(0, 1)$ dengan faktor skala $\frac{1}{3}$.
- (ii) **U** ialah putaran 90° lawan arah jam pada pusat $(3, 6)$.

$$(b) \text{ Luas } ABCD = k^2 \times \text{Luas } PRTU$$

$$4.5 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \text{Luas } PRTU$$

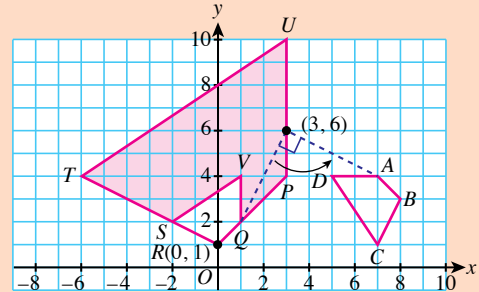
$$\text{Luas } PRTU = 4.5 \times 9$$

$$= 40.5 \text{ m}^2$$

$$\text{Luas kawasan berwarna} = 40.5 - 4.5$$

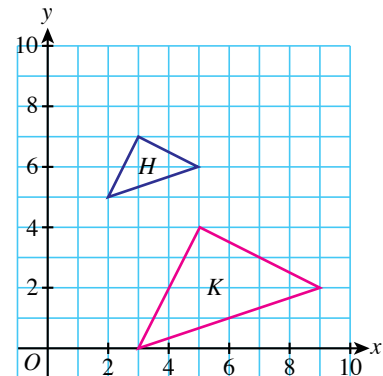
$$= 36 \text{ m}^2$$

Gabungan transformasi **UV** ialah pembesaran diikuti putaran. Maka, **V** ialah pembesaran dan **U** ialah putaran.

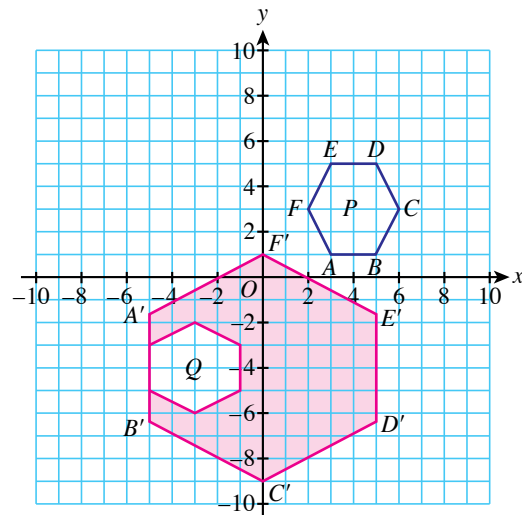


Latih Kendiri 5.3d

- Dalam rajah di sebelah, segi tiga **K** ialah imej bagi segi tiga **H** di bawah gabungan transformasi **PQ**.
 - Perihalkan transformasi **P** dan transformasi **Q**.
 - Perihalkan satu transformasi tunggal yang setara dengan transformasi **PQ**.
 - Diberi bahawa luas segi tiga **K** ialah 10 unit^2 , hitung luas dalam unit^2 bagi segi tiga **H**.



- Rajah di sebelah menunjukkan pelan bagi suatu taman tema air. Kawasan berwarna merupakan kawasan untuk terowong air. Kawasan heksagon **P** dan **Q** merupakan medan selera. Semasa pembinaan taman tema air, arkitek telah menggunakan konsep transformasi untuk mereka pelan taman tema air ini dengan keadaan **Q** ialah imej bagi **P** di bawah suatu pantulan dan heksagon **A'B'C'D'E'F'** ialah imej bagi **P** di bawah gabungan transformasi **UV**.
 - Tentukan paksi pantulan itu.
 - Perihalkan transformasi **U**.
 - Diberi bahawa luas medan selera **P** ialah 60 m^2 , hitung luas dalam m^2 bagi kawasan berwarna.



5.4 Teselasi

 Apakah maksud teselasi?



Sarang lebah mempunyai struktur yang unik. Struktur ini dapat menyediakan ruang yang maksimum untuk menyimpan madu lebah. Apakah ciri-ciri yang terdapat pada struktur sarang lebah dan bagaimanakah struktur ini dibina?

Struktur sarang lebah merupakan suatu bentuk **teselasi**.

Teselasi ialah pola bagi bentuk berulang yang memenuhi suatu satah tanpa ruang kosong atau pertindihan.

Standard Pembelajaran

Menjelaskan maksud teselasi.

**Seronoknya
Matematik!**

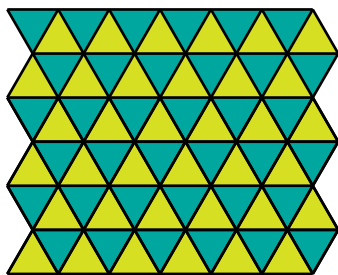
Uji Kefahaman Tentang Teselasi

Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB506. Seret titik-titik pada paparan sehingga suatu teselasi dihasilkan. Cetak hasil kerja anda dan tunjukkan kepada guru.

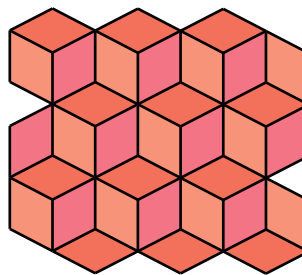


Rajah di bawah menunjukkan beberapa contoh teselasi.

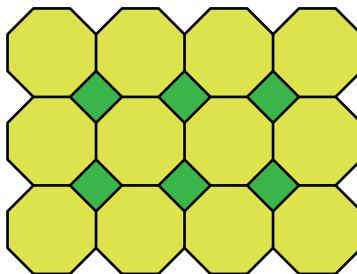
- (i) Teselasi yang terdiri daripada segi tiga sama sisi



- (ii) Teselasi yang terdiri daripada rombus



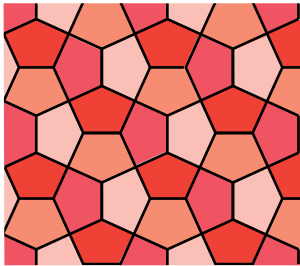
- (iii) Teselasi yang terdiri daripada gabungan segi empat sama dan oktagon sekata



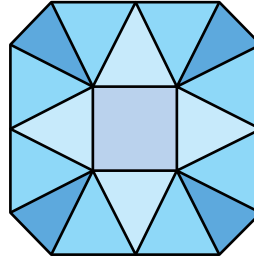
Contoh 21

Tentukan sama ada setiap bentuk yang berikut merupakan suatu teselasi.

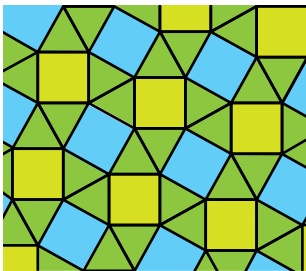
(a)



(b)



(c)



(d)

**Penyelesaian:**

- (a) Merupakan teselasi yang terdiri daripada pentagon sahaja.
- (b) Bukan teselasi kerana terdapat bentuk yang tidak berulang iaitu segi empat sama.
- (c) Merupakan teselasi yang terdiri daripada gabungan segi tiga sama sisi dan segi empat sama.
- (d) Merupakan teselasi yang terdiri daripada corak yang berulang tanpa pertindihan.

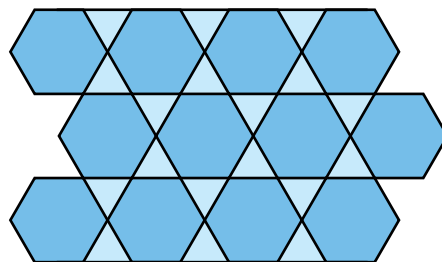
Latih Kendiri 5.4a

1. Tentukan sama ada setiap bentuk yang berikut merupakan suatu teselasi.

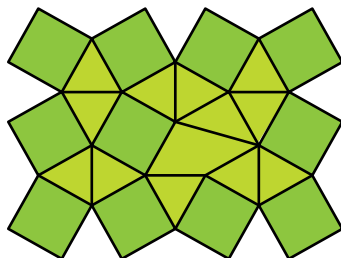
(a)



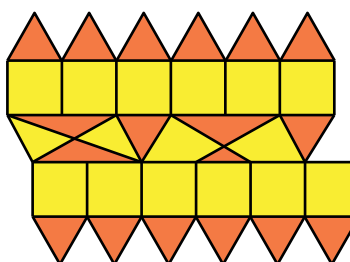
(b)



(c)



(d)



Bagaimanakah mereka bentuk teselasi?

Standard Pembelajaran

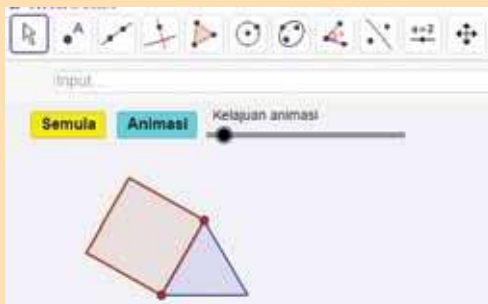
Mereka bentuk teselasi yang melibatkan transformasi isometri.

MOBILISASI MINDA 7 Berpasangan

Tujuan: Mereka bentuk teselasi dengan transformasi isometri

Langkah:

1. Buka fail GGB507 untuk aktiviti ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB507 untuk mendapatkan fail GeoGebra aktiviti ini.

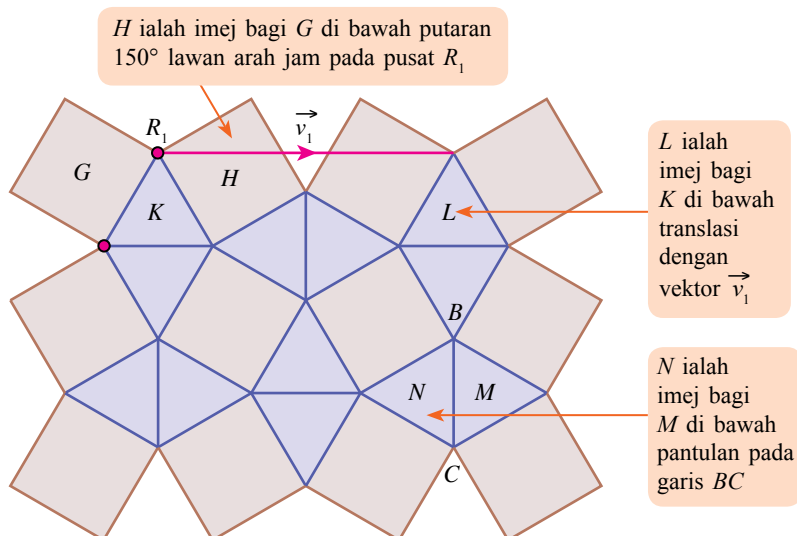
2. Tekan 'Animasi'.
3. Perhatikan transformasi yang terlibat dalam penghasilan suatu teselasi.
4. Seret gelongsor 'Kelajuan animasi' dengan kelajuan yang sesuai.
5. Tekan 'Semula' jika ingin membuat pemerhatian sekali lagi.

Perbincangan:

1. Berapa jenis transformasi yang digunakan untuk mereka bentuk teselasi dalam aktiviti ini? Nyatakan kesemua transformasi tersebut.
2. Bincangkan cara gabungan transformasi digunakan dalam mereka bentuk teselasi.

Hasil daripada Mobilisasi Minda 7, didapati bahawa kita dapat mereka bentuk teselasi dengan menggunakan transformasi isometri seperti translasi, pantulan dan putaran.

Berikut menunjukkan beberapa langkah yang terlibat semasa menghasilkan teselasi dalam aktiviti di atas.



KOTAK MEMORI

Transformasi isometri merupakan transformasi yang menghasilkan imej yang kongruen dengan objek.

Contoh 22

Rajah di bawah menunjukkan suatu bentuk teselasi yang terdiri daripada segi tiga sama sisi yang dihasilkan dengan transformasi isometri. Nyatakan transformasi yang terlibat untuk menghasilkan

- bentuk Q daripada bentuk P
- bentuk R daripada bentuk Q
- bentuk S daripada bentuk P

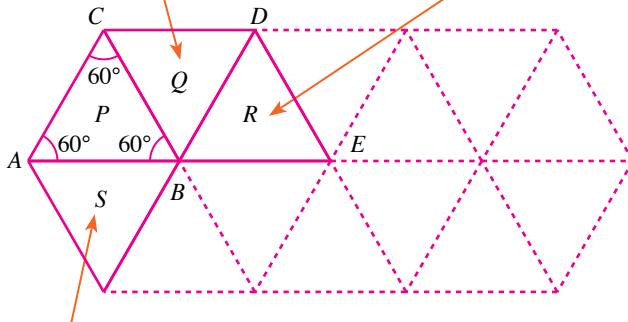
Penyelesaian:

Q ialah imej bagi P di bawah

- pantulan pada garis BC atau
- putaran 60° ikut arah jam pada pusat B

R ialah imej bagi Q di bawah

- pantulan pada garis BD atau
- putaran 60° lawan arah jam pada pusat D

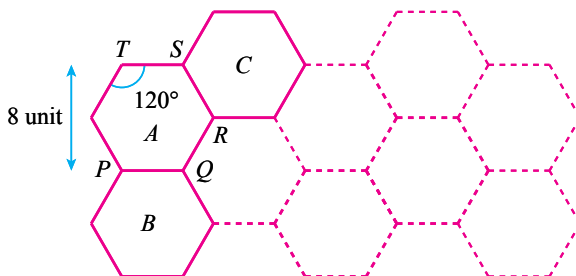


S ialah imej bagi P di bawah

- pantulan pada garis AB atau
- putaran 60° ikut arah jam pada pusat A

Latih Kendiri 5.4b

- Rajah di bawah menunjukkan suatu bentuk teselasi yang terdiri daripada heksagon sekata yang dihasilkan dengan transformasi isometri.



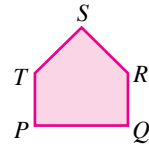
Nyatakan transformasi yang terlibat untuk menghasilkan

- bentuk B daripada bentuk A
- bentuk C daripada bentuk A



Medan Interaktif

Rajah di bawah menunjukkan satu pentagon $PQRST$.



Dengan menggunakan pentagon tersebut, bincangkan dalam kumpulan cara mereka bentuk beberapa teselasi yang berlainan dengan gabungan transformasi.

Buletin Ilmiah

R juga merupakan imej bagi P di bawah translasi

$$\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dengan keadaan}$$

$d = \text{jarak } AB$

Buletin Ilmiah

Teselasi Jenis Escher



Contoh teselasi jenis Escher

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) merupakan seorang seniman grafik Belanda. Beliau telah mereka cipta banyak hasil seni berasaskan konsep matematik. Beliau telah memperkenalkan suatu cara yang unik dan menarik untuk menghasilkan corak teselasi yang dikenali sebagai teselasi jenis Escher. Teselasi Escher ialah teselasi yang bentuknya boleh dikenal pasti dalam kehidupan sebenar.

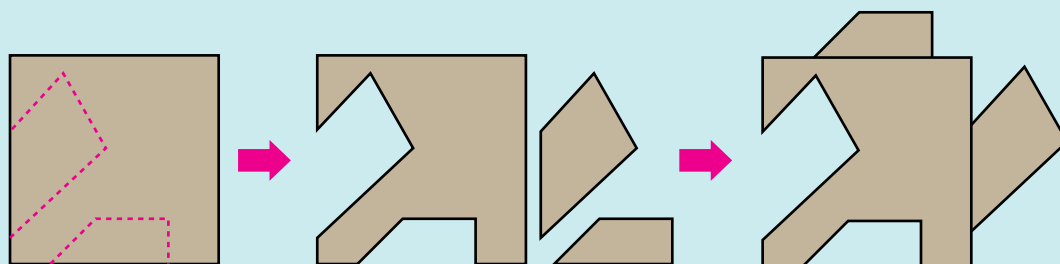
PROJEK

Tujuan: Mereka bentuk teselasi jenis Escher

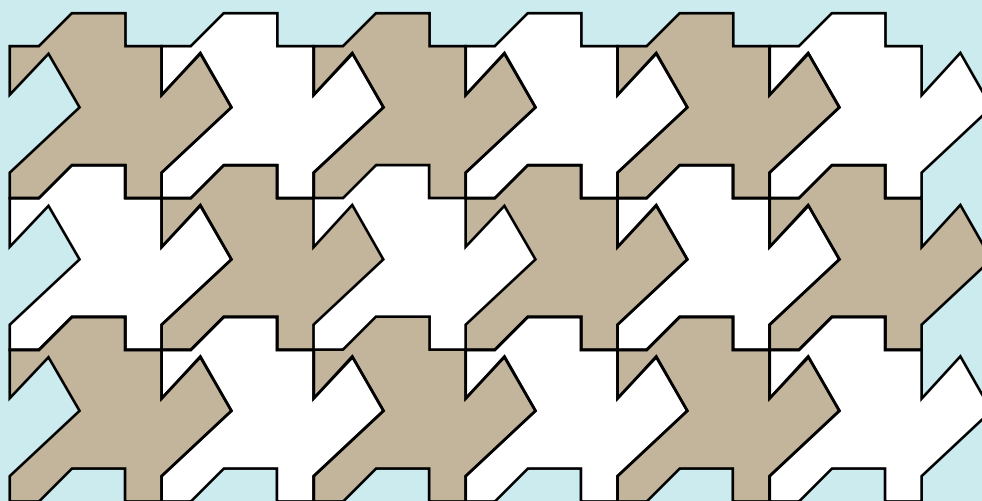
Bahan: Kadkod, kertas warna, gunting, gam

Langkah:

1. Lakukan projek ini secara berkumpulan.
2. Potong kertas warna yang disediakan menjadi 18 segi empat sama yang sama saiz.
3. Pilih dua bahagian tepi pada sekeping segi empat sama, lukis dan potong dua corak yang berlainan bentuk. Seterusnya, tampalkan bahagian yang tinggal itu pada kadkod dan kedua-dua corak yang dipotong itu dilekat pada dua sisi lagi pada bahagian yang tinggal seperti ditunjukkan dalam rajah di bawah.



4. Ulangi langkah 3 untuk menghasilkan lagi 17 buah bentuk yang sama.
5. Susun dan tampalkan semua bentuk yang terhasil pada kadkod untuk menghasilkan teselasi jenis Escher seperti ditunjukkan dalam rajah di bawah. Apakah ciri yang membezakan teselasi biasa dengan teselasi jenis Escher?



6. Ulangi projek ini untuk mereka cipta beberapa lagi bentuk teselasi jenis Escher yang berlainan corak.
7. Pamerkan hasil reka cipta kumpulan anda di dalam kelas.
8. Bentangkan
 - (a) transformasi yang digunakan dalam hasil reka cipta kumpulan anda.
 - (b) kesimpulan anda tentang teselasi jenis Escher.

Arena Rumusan

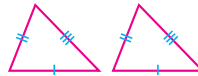
Bentuk kongruen

- Mempunyai panjang sisi sepadan dan saiz sudut sepadan yang sama

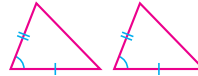


Kekongruenan segi tiga

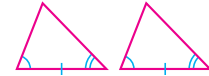
- Sisi-Sisi-Sisi (SSS)



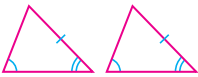
- Sisi-Sudut-Sisi (SAS)



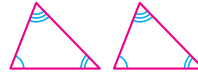
- Sudut-Sisi-Sudut (ASA)



- Sudut-Sudut-Sisi (AAS)

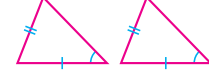


- Sudut-Sudut-Sudut (AAA)



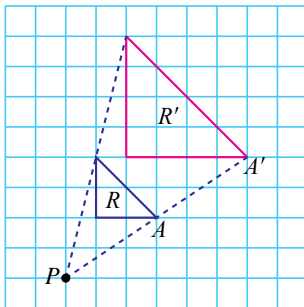
Luas mesti sama

- Sisi-Sisi-Sudut (SSA)



Luas mesti sama

Pembesaran



- Objek dan imej adalah serupa
- Faktor skala, $k = \frac{PA'}{PA}$
- Luas imej
 $= k^2 \times \text{Luas objek}$

Gabungan transformasi

- Gabungan transformasi **AB** bermaksud transformasi **B** diikuti transformasi **A**



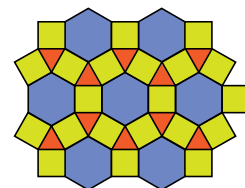
Untuk menentukan imej daripada objek di bawah transformasi **AB**, ikut tertib transformasi **B** diikuti transformasi **A**.



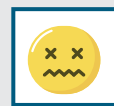
Untuk menentukan objek daripada imej, tertib transformasi dipertimbangkan secara songsang dengan tertib menentukan imej di bawah gabungan transformasi yang sama.

Teselasi

- Teselasi ialah pola bagi bentuk berulang yang memenuhi suatu satah tanpa ruang kosong atau pertindihan
- Teselasi dapat direka daripada transformasi isometri



Refleksi



Pada akhir bab ini, saya dapat

membezakan antara bentuk kongruen dan bukan kongruen berdasarkan sisi dan sudut.

membuat dan menentusahkan konjektur terhadap kekongruenan segi tiga berdasarkan sisi dan sudut.

menyelesaikan masalah yang melibatkan kekongruenan.

menjelaskan maksud keserupaan objek geometri.

membuat perkaitan antara keserupaan dengan pembesaran dan seterusnya memerihalkan pembesaran menggunakan pelbagai perwakilan.

menentukan imej dan objek bagi suatu pembesaran.

membuat dan mengesahkan konjektur tentang hubungan antara luas imej dan luas objek bagi suatu pembesaran.

menyelesaikan masalah yang melibatkan pembesaran.

menentukan imej dan objek bagi suatu gabungan transformasi.

membuat dan menentusahkan konjektur tentang sifat kalis tukar tertib terhadap gabungan transformasi.

memerihalkan gabungan transformasi.

menyelesaikan masalah yang melibatkan gabungan transformasi.

menjelaskan maksud teselasi.

mereka bentuk teselasi yang melibatkan transformasi isometri.

PROJEK MINI

Pakaian batik merupakan satu daripada warisan budaya yang istimewa di Malaysia. Rekaan corak pada batik Malaysia terkenal di peringkat dunia. Gunakan kreativiti anda, reka corak batik yang berwarna-warni dengan menggunakan teselasi jenis Escher. Anda boleh gunakan perisian geometri dinamik atau bahan konkrit untuk menghasilkan corak batik tersebut. Kemudian, pameran hasil kerja anda di dalam kelas.



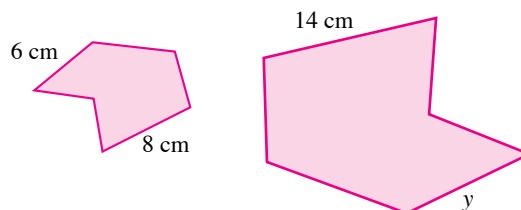


FAHAM

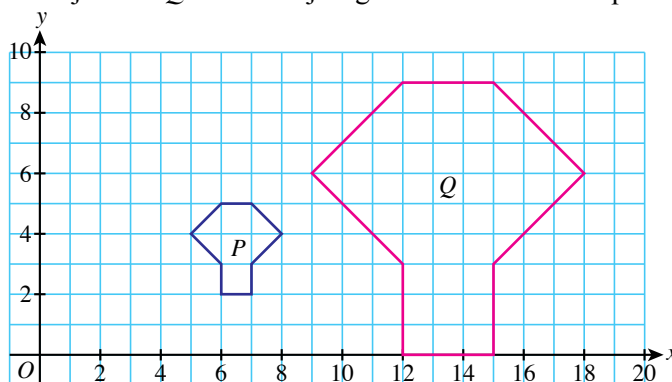
- Rajah di sebelah menunjukkan dua trapezium yang kongruen dengan sepasang sisi yang sama panjang. Hitung nilai x .



- Rajah di sebelah menunjukkan dua objek geometri yang serupa. Hitung nilai y .



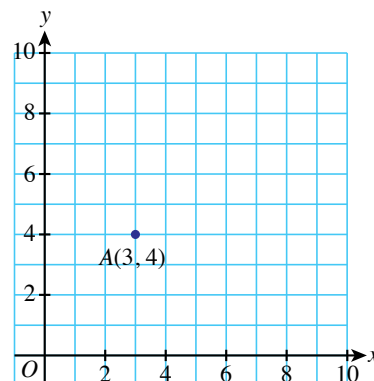
- Rajah di bawah menunjukkan Q ialah imej bagi P di bawah suatu pembesaran.



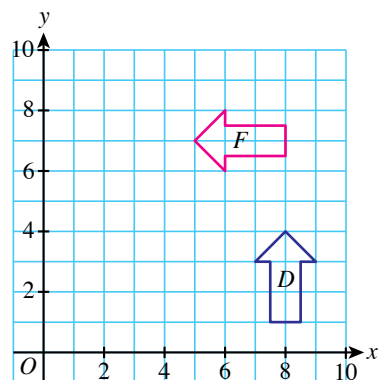
Perihalkan pembesaran tersebut.

- Diberi bahawa luas bagi bentuk A dan bentuk B ialah 18 cm^2 dan 32 cm^2 . Jika bentuk B ialah imej bagi bentuk A di bawah suatu pembesaran, tentukan faktor skala bagi pembesaran itu.

- Rajah di sebelah menunjukkan suatu titik A yang terletak pada satah Cartes. Diberi bahawa transformasi R ialah translasi $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ dan transformasi S ialah pantulan pada garis $y = 7$. Nyatakan koordinat imej bagi titik A di bawah gabungan transformasi RS .



6. Rajah di sebelah menunjukkan F ialah imej bagi D di bawah gabungan transformasi $\mathbf{GH}$. Diberi bahawa transformasi $\mathbf{H}$ ialah pantulan pada garis $x = 6$. Perihalkan transformasi $\mathbf{G}$.

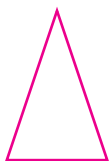


MASTERI

7. Berdasarkan setiap poligon yang berikut, reka suatu bentuk teselasi dengan menggunakan transformasi isometri.



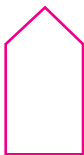
(a) segi tiga sama kaki



(b) trapezium



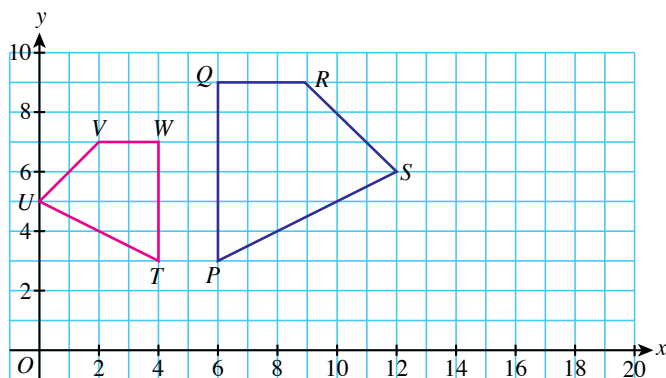
(c) pentagon



(d) heksagon

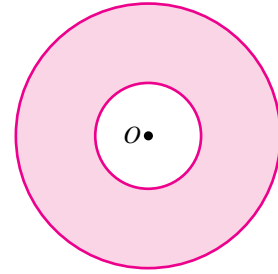


8. Rajah di bawah menunjukkan dua sisi empat $PQRS$ dan $TUVW$ yang dilukis pada satah Cartes.

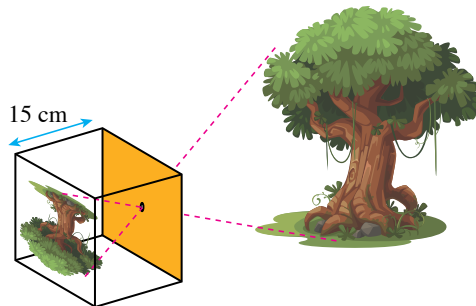


- (a) Sisi empat $TUVW$ ialah imej bagi sisi empat $PQRS$ di bawah gabungan transformasi $\mathbf{MN}$. Perihalkan
- transformasi $\mathbf{N}$,
 - transformasi $\mathbf{M}$.
- (b) Diberi bahawa luas bagi sisi empat $TUVW$ ialah 10 unit², hitung luas dalam unit² bagi sisi empat $PQRS$.

9. Rajah di sebelah menunjukkan dua bulatan dengan pusat O yang sama. Bulatan yang besar ialah imej bagi bulatan yang kecil di bawah suatu pembesaran pada pusat O . Diberi jejari bagi bulatan kecil ialah 3 cm dan luas kawasan berwarna ialah $47.25\pi \text{ cm}^2$. Hitung faktor skala bagi pembesaran itu.

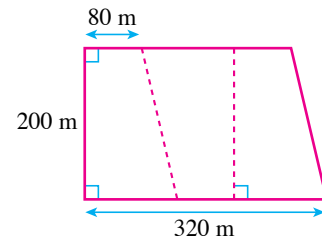


10. Zurina telah membina sebuah kamera lubang jarum untuk memerhatikan imej sebatang pokok seperti ditunjukkan pada rajah di bawah.

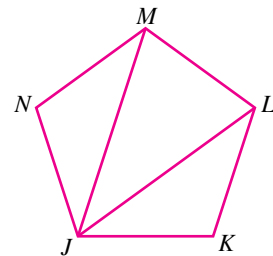


Diberi faktor skala bagi imej yang terhasil ialah $-\frac{1}{80}$. Berapakah jarak mengufuk dalam cm di antara pokok itu dengan imejnya?

11. Puan Noriah mempunyai sebidang tanah berbentuk trapezium. Dia telah membahagikan tanahnya kepada tiga bahagian yang kongruen seperti ditunjukkan pada rajah di sebelah. Hitung
- perimeter dalam m bagi seluruh tanah itu.
 - luas dalam m^2 bagi setiap bahagian tanah itu.

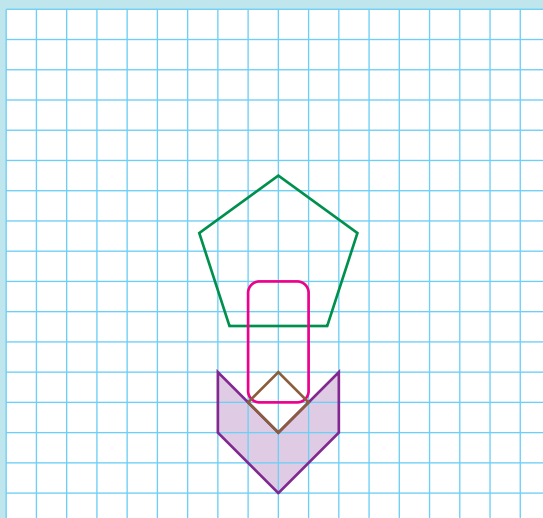


12. Rajah di sebelah menunjukkan pentagon sekata $JKLMN$. Diberi bahawa segi tiga JNM merupakan imej bagi segi tiga JKL di bawah gabungan transformasi $\mathbf{XY}$. Perihalkan transformasi $\mathbf{X}$ dan transformasi $\mathbf{Y}$.

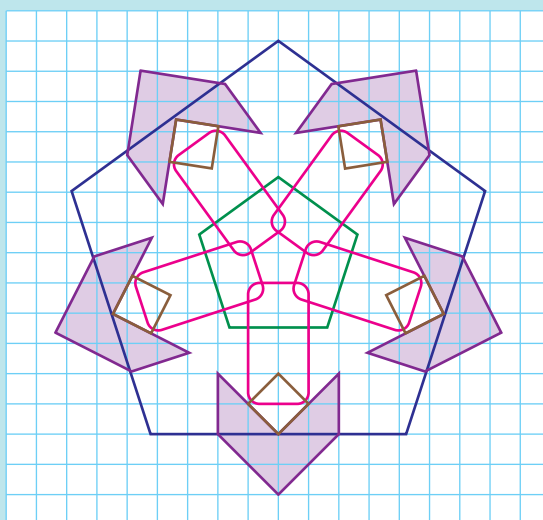




Rajah (a) di bawah menunjukkan beberapa bentuk dilukis pada grid segi empat sama.



Rajah (b) di bawah menunjukkan suatu logo yang direka dengan mengaplikasikan transformasi ke atas bentuk di Rajah (a) dan dilukis pada grid segi empat sama.



Berdasarkan pemerhatian dan perbincangan dalam kumpulan, huraikan dengan jelas transformasi yang telah digunakan dalam mereka cipta logo itu.

Kemudian, dengan memilih gabungan bentuk poligon, reka cipta suatu logo untuk persatuan atau kelab di sekolah anda dengan mengaplikasikan transformasi ke atas gabungan bentuk poligon itu. Bentangkan logo yang anda reka berdasarkan aspek yang berikut:

- Makna yang diwakili oleh bahagian atau warna bagi logo itu.
- Moto yang bersesuaian.
- Gabungan transformasi yang digunakan.

BAB 6

Nisbah dan Graf Fungsi Trigonometri

Apakah yang akan anda pelajari?

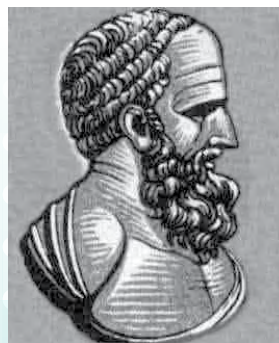
- Nilai Sinus, Kosinus dan Tangen bagi Sudut θ , $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$
- Graf Fungsi Sinus, Kosinus dan Tangen

Maslahat Bab Ini

Jurutera menggunakan graf fungsi trigonometri dalam pembinaan dewan konsert untuk mengukur kekuatan bunyi supaya bunyi didengar dengan jelas. Ahli geologi juga menggunakan graf fungsi trigonometri untuk membantu mereka memahami pembentukan corak berkala kejadian gempa bumi dan gelombang ombak.

Tahukah Anda?

Hipparchus dari Nicaea merupakan seorang ahli astronomi dan ahli matematik yang dikenali sebagai Bapa Trigonometri atas sumbangannya dalam trigonometri. Beliau menghasilkan satu sifir trigonometri dalam percubaannya untuk memahami pergerakan bintang-bintang dan bulan.



Untuk maklumat lanjut:



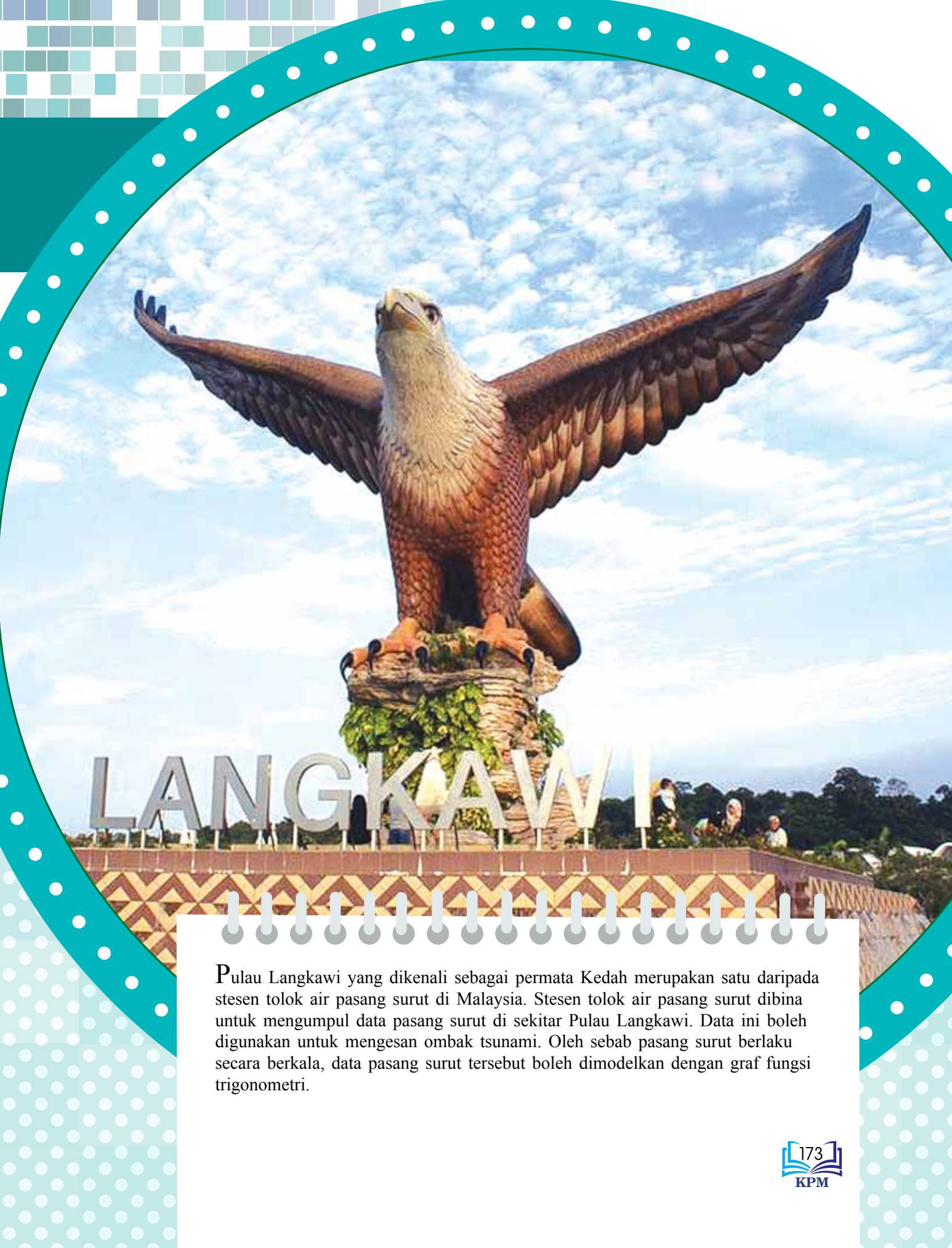
bit.do/TahukahAndaBab6

GERBANG ISTILAH



bulatan unit
fungsi trigonometri
kosinus
sinus
sudut rujukan sepadan
sukuan
tangen

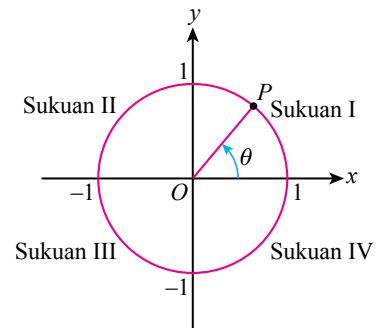
unit circle
trigonometric function
cosine
sine
corresponding reference angle
quadrant
tangent



Pulau Langkawi yang dikenali sebagai permata Kedah merupakan satu daripada stesen tolok air pasang surut di Malaysia. Stesen tolok air pasang surut dibina untuk mengumpul data pasang surut di sekitar Pulau Langkawi. Data ini boleh digunakan untuk mengesan ombak tsunami. Oleh sebab pasang surut berlaku secara berkala, data pasang surut tersebut boleh dimodelkan dengan graf fungsi trigonometri.

6.1 Nilai Sinus, Kosinus dan Tangen bagi Sudut θ , $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

Rajah di sebelah menunjukkan satu bulatan unit. **Bulatan unit** ialah bulatan yang berjari 1 unit dan berpusat di asalan. Paksi- x dan paksi- y membahagikan bulatan unit kepada 4 sukuan yang sama, iaitu sukuan I, sukuan II, sukuan III dan sukuan IV.



Diberi P ialah satu titik yang bergerak di sepanjang lilitan bulatan unit dan θ ialah sudut yang dibentuk oleh jejari bulatan unit, OP , dari paksi- x yang positif mengikut arah lawan jam. Didapati bahawa

- titik P berada dalam sukuan I apabila $0^\circ < \theta < 90^\circ$,
- titik P berada dalam sukuan II apabila $90^\circ < \theta < 180^\circ$,
- titik P berada dalam sukuan III apabila $180^\circ < \theta < 270^\circ$,
- titik P berada dalam sukuan IV apabila $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

Apakah perkaitan fungsi sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV dengan sudut rujukan sepadan?

Standard Pembelajaran

Membuat dan menentusahkan konjektur tentang nilai sinus, kosinus dan tangen sudut dalam sukuan II, III dan IV dengan sudut rujukan sepadan.

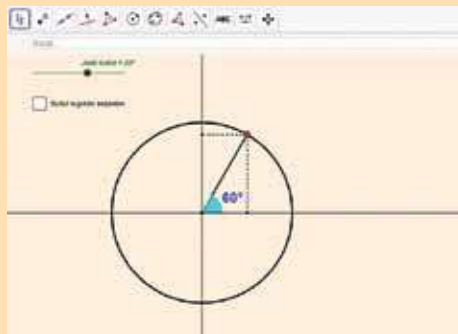
MOBILISASI MINDA 1

Berpasangan

Tujuan: Meneroka perkaitan fungsi sinus, kosinus dan tangen sudut dalam sukuan II, III dan IV dengan sudut rujukan sepadan.

Langkah:

- Buka fail GGB601 untuk aktiviti ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB601 untuk mendapatkan fail GeoGebra aktiviti ini.

- Seret titik merah ke sukuan II, III dan IV. Perhatikan sudut berwarna biru. [Gelongsor 'Julat sudut' boleh diseret untuk mengubah sudut yang dipaparkan.]
- Tekan 'Sudut rujukan sepadan'.
- Seret titik merah dan perhatikan sudut rujukan sepadan dalam sukuan II, III dan IV.

5. Tulis hubungan antara sudut rujukan sepadan, α , dengan sudut berwarna biru, θ , dalam setiap sukuan.

Sukuan I	Sukuan II	Sukuan III	Sukuan IV
$\alpha =$	$\alpha =$	$\alpha =$	$\alpha =$

6. Seret titik merah dan pilih satu sudut berwarna biru, θ , di sukuan II, III dan IV untuk lengkapkan jadual di bawah. Kalkulator saintifik digunakan untuk membuat pengiraan.

Sukuan :

Sudut berwarna biru, $\theta =$ Sudut rujukan sepadan, $\alpha =$

$\sin \theta$	$\sin \alpha$	$\cos \theta$	$\cos \alpha$	$\tan \theta$	$\tan \alpha$

7. Berdasarkan jadual dalam langkah 6, bandingkan nilai sinus, kosinus dan tangen sudut berwarna biru, θ , dengan sudut rujukan sepadan, α . Lengkapkan setiap berikut dengan tanda positif atau tanda negatif.

Sukuan II

$$\sin \theta = \text{ } \sin \alpha$$

$$\cos \theta = \text{ } \cos \alpha$$

$$\tan \theta = \text{ } \tan \alpha$$

Sukuan III

$$\sin \theta = \text{ } \sin \alpha$$

$$\cos \theta = \text{ } \cos \alpha$$

$$\tan \theta = \text{ } \tan \alpha$$

Sukuan IV

$$\sin \theta = \text{ } \sin \alpha$$

$$\cos \theta = \text{ } \cos \alpha$$

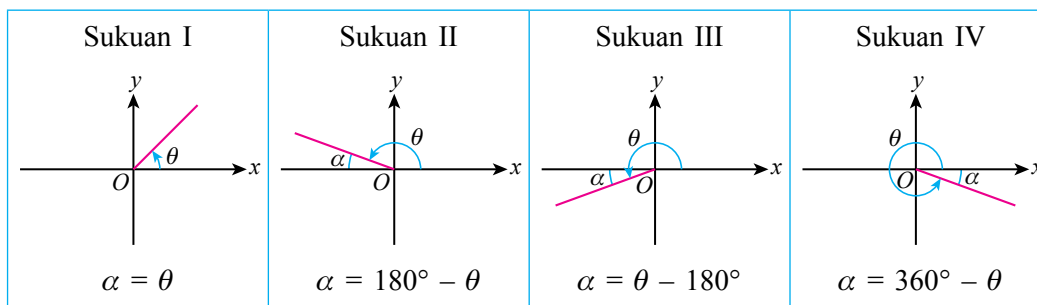
$$\tan \theta = \text{ } \tan \alpha$$

Perbincangan:

1. Apakah ciri-ciri sudut rujukan sepadan dan hubungannya dengan sudut dalam sukuan II, III dan IV?
2. Apakah kesimpulan anda tentang perkaitan fungsi sinus, kosinus dan tangen sudut dalam sukuan II, III dan IV dengan sudut rujukan sepadan?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 1, didapati bahawa;

- (a) **Sudut rujukan sepadan**, α , sentiasa kurang daripada 90° . Sudut dalam sukuan II, III dan IV mempunyai sudut rujukan sepadan, α . Sudut dalam sukuan I itu sendiri merupakan sudut rujukan sepadan, $\alpha = \theta$.

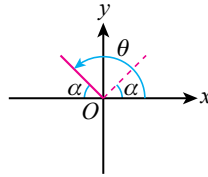


Sudut rujukan dalam sukuan II, III dan IV ialah sudut dalam sukuan I yang sepadan dengannya.

- (b) Hubungan antara fungsi sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV dengan sudut rujukan sepadan boleh dirumuskan seperti berikut:

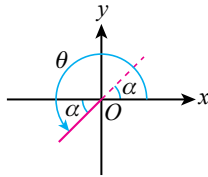
Sukuan II

$$\begin{aligned}\sin \theta &= +\sin \alpha = +\sin (180^\circ - \theta) \\ \cos \theta &= -\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \theta) \\ \tan \theta &= -\tan \alpha = -\tan (180^\circ - \theta)\end{aligned}$$



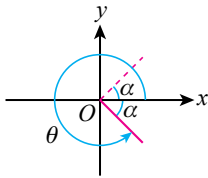
Sukuan III

$$\begin{aligned}\sin \theta &= -\sin \alpha = -\sin (\theta - 180^\circ) \\ \cos \theta &= -\cos \alpha = -\cos (\theta - 180^\circ) \\ \tan \theta &= +\tan \alpha = +\tan (\theta - 180^\circ)\end{aligned}$$



Sukuan IV

$$\begin{aligned}\sin \theta &= -\sin \alpha = -\sin (360^\circ - \theta) \\ \cos \theta &= +\cos \alpha = +\cos (360^\circ - \theta) \\ \tan \theta &= -\tan \alpha = -\tan (360^\circ - \theta)\end{aligned}$$



Sukuan II sin θ (+) kos θ (-) tan θ (-)	Sukuan I Semua (+)
Sukuan III sin θ (-) kos θ (-) tan θ (+)	Sukuan IV sin θ (-) kos θ (+) tan θ (-)

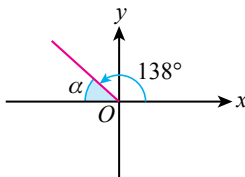
Contoh 1

Tentukan sukuan dan sudut rujukan sepadan bagi setiap sudut berikut.

- (a) 138° (b) 239° (c) 312°

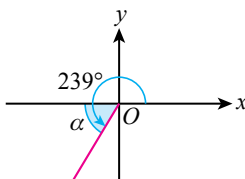
Penyelesaian:

(a)



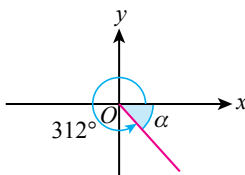
$$\begin{aligned}138^\circ &\text{ terletak dalam sukuan II.} \\ \text{Sudut rujukan sepadan, } \alpha &= 180^\circ - 138^\circ \\ &= 42^\circ\end{aligned}$$

(b)



$$\begin{aligned}239^\circ &\text{ terletak dalam sukuan III.} \\ \text{Sudut rujukan sepadan, } \alpha &= 239^\circ - 180^\circ \\ &= 59^\circ\end{aligned}$$

(c)



$$\begin{aligned}312^\circ &\text{ terletak dalam sukuan IV.} \\ \text{Sudut rujukan sepadan, } \alpha &= 360^\circ - 312^\circ \\ &= 48^\circ\end{aligned}$$

TiP Bestari

Sudut rujukan sepadan ialah sudut tirus.

Minda Kritis

Untuk mendapatkan sudut rujukan sepadan, α , mengapakah rumus $\theta - 180^\circ$ digunakan di dalam Contoh 1(b)?

Minda Kritis

Hitung sudut rujukan sepadan sekiranya sudut yang diberi ialah 498° .

Contoh 2

Nyatakan hubungan fungsi trigonometri yang berikut dengan sudut rujukan sepadan.

- (a) $\sin 167^\circ$ (b) $\cos 258^\circ$ (c) $\tan 349^\circ$

Penyelesaian:

hanya $\sin \theta$ bernilai positif

- (a) Sudut 167° terletak dalam sukuan II.
 $\sin \theta = \sin (180^\circ - \theta)$
 $\sin 167^\circ = \sin (180^\circ - 167^\circ)$
 $\sin 167^\circ = \sin 13^\circ$

hanya $\cos \theta$ bernilai positif

- (c) Sudut 349° terletak dalam sukuan IV.
 $\tan \theta = -\tan (360^\circ - \theta)$
 $\tan 349^\circ = -\tan (360^\circ - 349^\circ)$
 $\tan 349^\circ = -\tan 11^\circ$

hanya $\tan \theta$ bernilai positif

- (b) Sudut 258° terletak dalam sukuan III.
 $\cos \theta = -\cos (\theta - 180^\circ)$
 $\cos 258^\circ = -\cos (258^\circ - 180^\circ)$
 $\cos 258^\circ = -\cos 78^\circ$

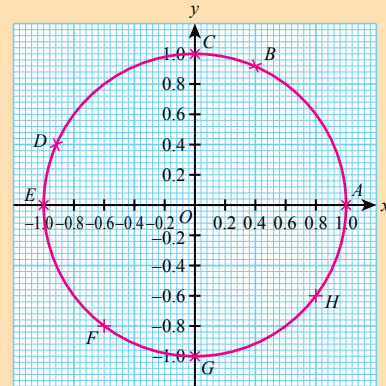
MOBILISASI MINDA 2 Berpasangan

Tujuan: Meneroka hubungan nilai sinus, kosinus dan tangen dengan nilai koordinat- x dan koordinat- y bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV dalam bulatan unit.

Langkah:

- Lukis paksi- x dan paksi- y dengan asalan O pada kertas graf serta satu bulatan berpusat O dengan jejari 1 unit seperti rajah di sebelah.
- Plot titik-titik seperti rajah di sebelah.
- Salin dan lengkapkan jadual seperti berikut.

Titik	koordinat- x	koordinat- y	$\frac{\text{koordinat-}y}{\text{koordinat-}x}$
A			
B			



- Diberi θ ialah sudut yang dibentuk oleh jejari bulatan unit dari paksi- x yang positif mengikut arah lawan jam. Ukur sudut θ tersebut daripada graf yang dilukis dan lengkapkan jadual seperti berikut.

Jejari	Sudut θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
OA				
OB				

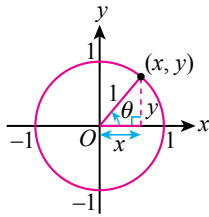
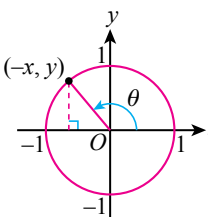
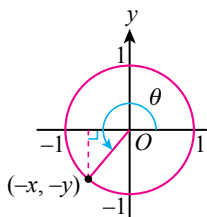
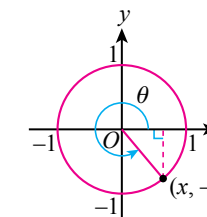
Perbincangan:

- Apakah hubungan nilai koordinat- x , koordinat- y dan nisbah koordinat- y kepada koordinat- x dengan nilai $\sin \theta$, $\cos \theta$ dan $\tan \theta$?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 2, didapati bahawa;

$$\sin \theta = \text{koordinat-}y \quad \cos \theta = \text{koordinat-}x \quad \tan \theta = \frac{\text{koordinat-}y}{\text{koordinat-}x}$$

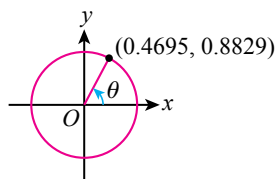
Secara umumnya,

Sukuan I	Sukuan II	Sukuan III	Sukuan IV
 $\sin \theta = +y$ $\cos \theta = +x$ $\tan \theta = +\frac{y}{x}$	 $\sin \theta = +y$ $\cos \theta = -x$ $\tan \theta = -\frac{y}{x}$	 $\sin \theta = -y$ $\cos \theta = -x$ $\tan \theta = +\frac{y}{x}$	 $\sin \theta = -y$ $\cos \theta = +x$ $\tan \theta = -\frac{y}{x}$

Contoh 3

Setiap rajah berikut menunjukkan satu bulatan unit dengan sudut θ . Tentukan nilai $\sin \theta$, $\cos \theta$ dan $\tan \theta$.

(a)



Penyelesaian:

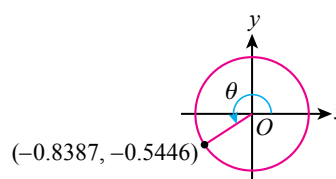
(a) $\sin \theta = 0.8829$

$\cos \theta = 0.4695$

$$\tan \theta = \frac{0.8829}{0.4695}$$

$$= 1.8805$$

(b)



(b) $\sin \theta = -0.5446$

$\cos \theta = -0.8387$

$$\tan \theta = \frac{-0.5446}{-0.8387}$$

$$= 0.6493$$

Latih Kendiri 6.1a

1. Tentukan sudut rujukan sepadan bagi setiap sudut berikut.

(a) 97°

(b) 189°

(c) 278°

(d) 164.2°

(e) 253.6°

(f) 305.7°

(g) $128^\circ 53'$

(h) $215^\circ 42'$

2. Nyatakan hubungan fungsi trigonometri yang berikut dengan sudut rujukan sepadan.

(a) $\sin 101^\circ$

(b) $\cos 194^\circ$

(c) $\tan 246^\circ$

(d) $\tan 294.5^\circ$

(e) $\sin 339.8^\circ$

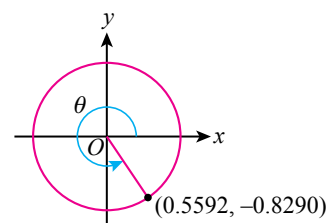
(f) $\cos 112.3^\circ$

(g) $\cos 287^\circ 45'$

(h) $\tan 96^\circ 31'$

(i) $\sin 203^\circ 26'$

3. Rajah di sebelah menunjukkan satu bulatan unit dengan sudut θ . Tentukan nilai $\sin \theta$, $\cos \theta$ dan $\tan \theta$.



Bagaimanakah menentukan nilai sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV?

Tentukan sudut rujukan sepadan.



Tentukan tanda positif atau negatif bagi sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV.

Standard Pembelajaran

Menentukan nilai sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV berdasarkan sudut rujukan sepadan.

Contoh 4

Tentukan nilai bagi setiap berikut berdasarkan sudut rujukan sepadan masing-masing.

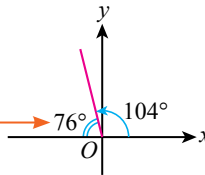
- (a) $\sin 104^\circ$ (b) $\cos 208.2^\circ$ (c) $\tan 318^\circ 17'$

Penyelesaian:

(a) $\sin 104^\circ = +\sin (180^\circ - 104^\circ)$
 $= +\sin 76^\circ$
 $= 0.9703$

nilai sinus adalah positif dalam sukuan II

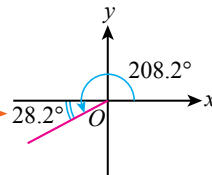
Sudut rujukan sepadan



(b) $\cos 208.2^\circ = -\cos (208.2^\circ - 180^\circ)$
 $= -\cos 28.2^\circ$
 $= -0.8813$

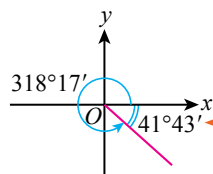
nilai kosinus adalah negatif dalam sukuan III

Sudut rujukan sepadan



(c) $\tan 318^\circ 17' = -\tan (360^\circ - 318^\circ 17')$
 $= -\tan 41^\circ 43'$
 $= -0.8915$

nilai tangen adalah negatif dalam sukuan IV



Sudut rujukan sepadan

TiP Bestari

Sukuan I : Semua positif
 Sukuan II : $\sin \theta$ positif
 Sukuan III : $\tan \theta$ positif
 Sukuan IV : $\cos \theta$ positif

Tip mengingat:
 Menggunakan akronim yang sesuai.

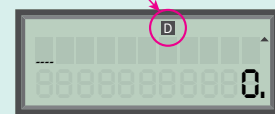
i-Teknologi

Untuk menentukan nilai $\tan 41^\circ 43'$ daripada kalkulator saintifik, tekan

$\tan$ 4 1 $^\circ$
 4 3 $'$ =

Pastikan kalkulator saintifik anda adalah dalam mod "Deg".

mod "Deg"



Latih Kendiri 6.1b

1. Tentukan nilai bagi setiap berikut berdasarkan sudut rujukan sepadan.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (a) $\sin 128^\circ$ | (b) $\sin 236^\circ$ | (c) $\sin 337^\circ$ |
| (d) $\cos 196^\circ$ | (e) $\cos 289^\circ$ | (f) $\cos 127^\circ$ |
| (g) $\tan 221^\circ$ | (h) $\tan 134^\circ$ | (i) $\tan 316^\circ$ |
| (j) $\tan 321.4^\circ$ | (k) $\sin 341.7^\circ$ | (l) $\cos 99.3^\circ$ |
| (m) $\cos 307^\circ 39'$ | (n) $\tan 102^\circ 38'$ | (o) $\sin 197^\circ 42'$ |

Bagaimanakah menentukan nilai sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV yang sepadan dengan sudut 30° , 45° dan 60° ?

Contoh 5

Tanpa menggunakan kalkulator saintifik, tentukan nilai bagi setiap berikut berdasarkan sudut rujukan sepadan.

- (a) $\cos 150^\circ$ (b) $\tan 225^\circ$ (c) $\sin 300^\circ$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{(a) } \cos 150^\circ &= -\cos (180^\circ - 150^\circ) \\ &= -\cos 30^\circ \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

nilai kosinus adalah negatif dalam sukuan II

$$\begin{aligned} \text{(b) } \tan 225^\circ &= +\tan (225^\circ - 180^\circ) \\ &= +\tan 45^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$

nilai tangen adalah positif dalam sukuan III

$$\begin{aligned} \text{(c) } \sin 300^\circ &= -\sin (360^\circ - 300^\circ) \\ &= -\sin 60^\circ \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

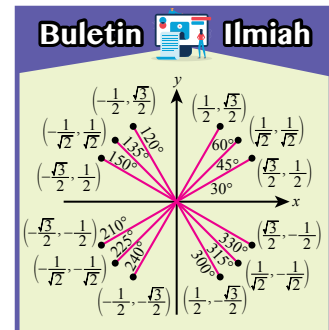
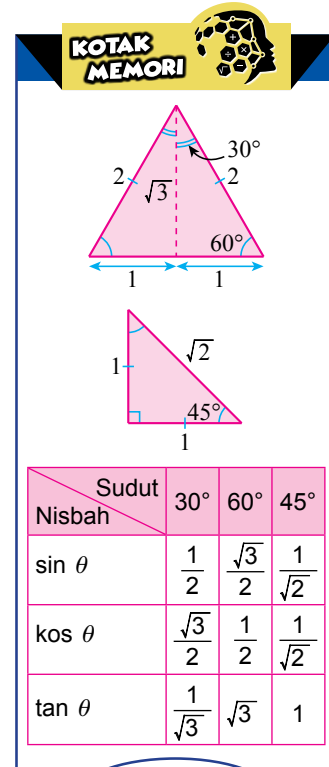
nilai sinus adalah negatif dalam sukuan IV

Latih Kendiri 6.1c

1. Tentukan nilai sinus, kosinus dan tangen bagi setiap sudut berikut tanpa menggunakan kalkulator saintifik.

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| (a) 120° | (b) 135° | (c) 210° |
| (d) 240° | (e) 315° | (f) 330° |

2. Diberi $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, hitung $\cos \theta$ dan $\tan \theta$ tanpa menggunakan kalkulator saintifik.





Bagaimanakah anda menentukan sudut apabila nilai sinus, kosinus dan tangen sudut tersebut diberi?

Standard Pembelajaran

Menentukan sudut apabila nilai sinus, kosinus dan tangen sudut tersebut diberi.

Kenal pasti sukuan berdasarkan tanda positif atau negatif pada nilai fungsi trigonometri.

Tentukan sudut rujukan sepadan.

Hitung sudut θ berdasarkan sukuan yang dikenal pasti.

Contoh 6

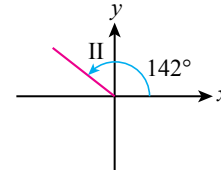
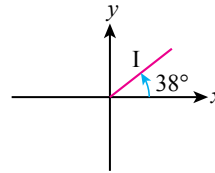
- (a) Diberi $\sin \theta = 0.6157$ dan $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, hitung sudut θ .
 (b) Diberi $\cos \theta = -0.4226$ dan $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, hitung sudut θ .
 (c) Diberi $\tan \theta = -1.4826$ dan $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, hitung sudut θ .

Penyelesaian:

- (a) $\sin \theta = 0.6157$ ← Tanda positif. θ berada dalam sukuan I atau II

$$\begin{aligned}\text{Sudut rujukan sepadan} \\ &= \sin^{-1} 0.6157 \\ &= 38^\circ\end{aligned}$$

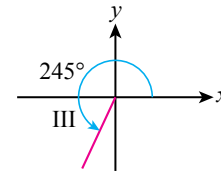
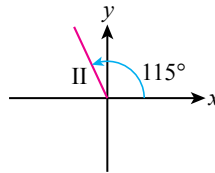
$$\begin{aligned}\theta &= 38^\circ \text{ atau } (180^\circ - 38^\circ) \\ &= 38^\circ \text{ atau } 142^\circ\end{aligned}$$



- (b) $\cos \theta = -0.4226$ ← Tanda negatif. θ berada dalam sukuan II atau III

$$\begin{aligned}\text{Sudut rujukan sepadan} \\ &= \cos^{-1} 0.4226 \\ &= 65^\circ\end{aligned}$$

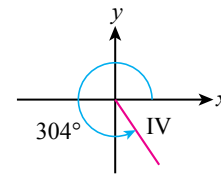
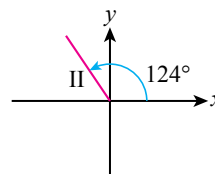
$$\begin{aligned}\theta &= (180^\circ - 65^\circ) \text{ atau } (180^\circ + 65^\circ) \\ &= 115^\circ \text{ atau } 245^\circ\end{aligned}$$



- (c) $\tan \theta = -1.4826$ ← Tanda negatif. θ berada dalam sukuan II atau IV

$$\begin{aligned}\text{Sudut rujukan sepadan} \\ &= \tan^{-1} 1.4826 \\ &= 56^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= (180^\circ - 56^\circ) \text{ atau } (360^\circ - 56^\circ) \\ &= 124^\circ \text{ atau } 304^\circ\end{aligned}$$

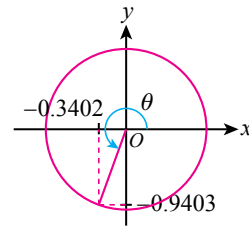


Latih Kendiri 6.1d

1. Diberi bahawa $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, hitung sudut θ bagi setiap yang berikut. Bundarkan jawapan kepada 1 tempat perpuluhan.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (a) $\sin \theta = 0.9397$ | (b) $\cos \theta = 0.9336$ | (c) $\tan \theta = 0.8391$ |
| (d) $\tan \theta = -1.198$ | (e) $\cos \theta = -0.6018$ | (f) $\sin \theta = -0.7314$ |
| (g) $\cos \theta = -0.5829$ | (h) $\sin \theta = -0.8395$ | (i) $\tan \theta = 0.7391$ |

2. Rajah di sebelah menunjukkan satu bulatan unit dengan $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. Hitung sudut θ . Bundarkan jawapan kepada 1 tempat perpuluhan.

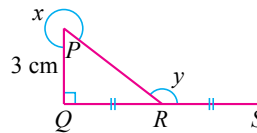


Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan sinus, kosinus dan tangen?

Contoh 7

Dalam rajah di sebelah, QRS ialah garis lurus. Diberi $QS = 8$ cm dan $QR = RS$, hitung

- (a) $\cos x$
(b) $\tan y$



Penyelesaian:

$$QR = 8 \text{ cm} \div 2 \quad \text{dan} \quad PR = \sqrt{3^2 + 4^2} \\ = 4 \text{ cm} \quad \quad \quad = 5 \text{ cm}$$

- (a) $270^\circ < x < 360^\circ$,
maka sudut x berada dalam sukuan IV.

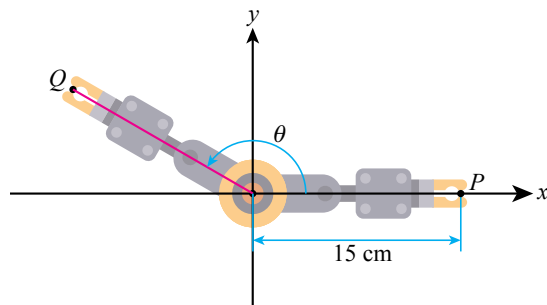
$$\cos x = +\cos \angle QPR \quad \leftarrow \angle QPR \text{ ialah sudut rujukan sepadan bagi sudut } x \\ = +\frac{3}{5}$$

- (b) $90^\circ < y < 180^\circ$,
maka sudut y berada dalam sukuan II.

$$\tan y = -\tan \angle PRQ \quad \leftarrow \angle PRQ \text{ ialah sudut rujukan sepadan bagi sudut } y \\ = -\frac{3}{4}$$

Contoh 8

Sekumpulan murid menghasilkan sebuah lengan robotik dengan panjang 15 cm seperti ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Lengan robotik itu diprogramkan untuk memindahkan satu objek dari titik P ke titik Q . Diberi bahawa $\cos \theta = -0.866$ dan $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, hitung sudut θ dan jarak, dalam cm, di antara titik P dengan titik Q .



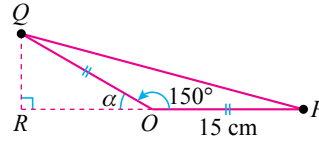
Penyelesaian:

$$\cos \theta = -0.866$$

Tanda negatif, θ berada dalam sukuan II ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)

$$\begin{aligned} \text{Sudut rujukan sepadan} \\ &= \cos^{-1} 0.866 \\ &= 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= 180^\circ - 30^\circ \\ &= 150^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - 150^\circ \\ &= 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{QR}{15} \\ QR &= 15 \sin 30^\circ \\ &= 7.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

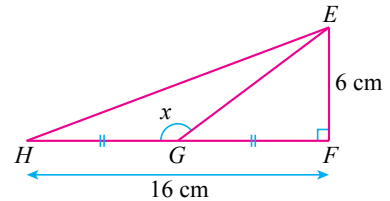
$$\cos 30^\circ = \frac{OR}{15}$$

$$\begin{aligned} OR &= 15 \cos 30^\circ \\ &= 12.99 \text{ cm} \end{aligned}$$

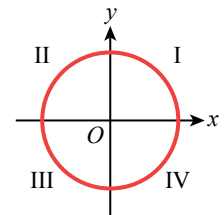
$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{QR^2 + PR^2} \\ &= \sqrt{7.5^2 + 27.99^2} \\ &= 28.98 \text{ cm} \end{aligned}$$

Latih Kendiri 6.1e

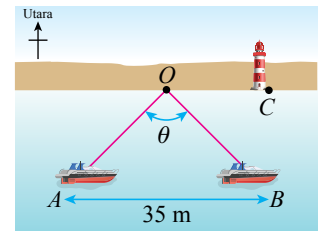
- Dalam rajah di sebelah, HGF ialah garis lurus. Diberi $HG = GF$, hitung
 - $\cos x$,
 - $\sin x$.



- Yong Ying bermain permainan baling damak. Papan damak berbentuk bulat dan mempunyai empat sukuan seperti ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Dia mendapati bahawa damak yang dilempar biasanya mengena kawasan sukuan yang mempunyai nilai $\sin \theta = 0.809$. Nyatakan
 - sukuan-sukuan tersebut,
 - sudut-sudut θ .



- Sebuah kapal belayar dari kedudukan A ke kedudukan B dengan keadaan jarak $OA = OB$. Laluan kapal tersebut adalah selari dengan daratan. Dari kedudukan B , kapal tersebut akan belayar ke arah utara menuju ke rumah api, C . Jika $OA = 20$ m, hitung
 - sudut θ ,
 - jarak, dalam m, di antara kapal tersebut di kedudukan B dengan rumah api,
 - nilai $\tan \angle AOC$.



- Rajah di sebelah menunjukkan sebuah jam loceng.
 - Hitung sudut θ yang dicangkum oleh jarum minit jika jarum minit itu diputarakan lawan arah jam dari nombor 3 ke nombor 10.
 - Seterusnya, hitung nilai $\cos \theta$.



6.2 Graf Fungsi Sinus, Kosinus dan Tangen



Selepas kita membuat pemeriksaan jantung di hospital, doktor akan menerangkan keadaan jantung kita berdasarkan keputusan elektrokardiogram. Graf elektrokardiogram mempunyai ciri-ciri graf fungsi trigonometri. Apakah ciri-ciri tersebut?

Apakah ciri-ciri graf fungsi trigonometri, $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan $y = \tan x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$?

Standard Pembelajaran

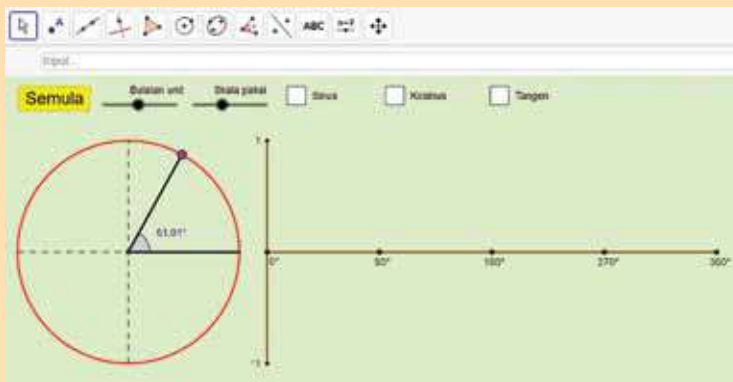
Melukis graf fungsi trigonometri, $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan $y = \tan x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ dan membandingbezakan ciri-ciri graf fungsi tersebut.

MOBILISASI MINDA 3 Berpasangan

Tujuan: Melukis graf fungsi trigonometri, $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan $y = \tan x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ serta membandingbezakan ciri-ciri graf tersebut.

Langkah: Aktiviti I

1. Buka fail GGB602 untuk aktiviti ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB602 untuk mendapatkan fail GeoGebra aktiviti ini.

2. Tekan 'Sinus' dan kemudian seret titik merah.
3. Perhatikan bentuk, nilai pada paksi-y apabila sudut ialah 0° , nilai maksimum, nilai minimum dan pintasan-x bagi graf yang terbentuk.
4. Ulangi Langkah 2 hingga 3 dengan 'Kosinus' dan 'Tangen'.
[Tekan 'Semula' jika ingin memadamkan graf yang terbentuk.]

Aktiviti II

1. Buka lembaran kerja dengan mengimbas kod QR untuk aktiviti ini. Lengkapkan jadual yang diberi.

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\sin x$							
$\cos x$							
$\tan x$							



Imbas kod QR atau layari bit.do/LKBab6 untuk mendapatkan lembaran kerja aktiviti ini.

2. Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 30° pada paksi- x dan 2 cm kepada 1 unit pada paksi- y , lukis graf fungsi $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan $y = \tan x$ secara berasingan pada kertas graf.
3. Perhatikan bentuk, nilai maksimum, nilai minimum, pintasan- x dan pintasan- y bagi setiap graf tersebut.
4. Lengkapkan jadual berikut.

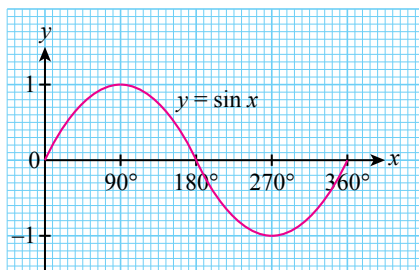
	Nilai maksimum	Nilai minimum	Pintasan- x	Pintasan- y
$y = \sin x$				
$y = \cos x$				
$y = \tan x$				

Perbincangan:

Bagi graf sinus, kosinus dan tangen,

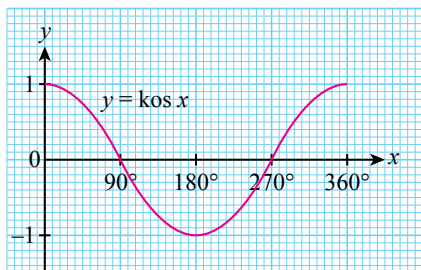
- (a) apakah bentuk setiap graf tersebut?
- (b) apakah nilai maksimum dan nilai minimum bagi setiap graf tersebut?
- (c) apakah pintasan- x dan pintasan- y bagi setiap graf tersebut?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 3, didapati bahawa ciri-ciri graf sinus, kosinus dan tangen adalah seperti berikut.

Graf sinus, $y = \sin x$ 

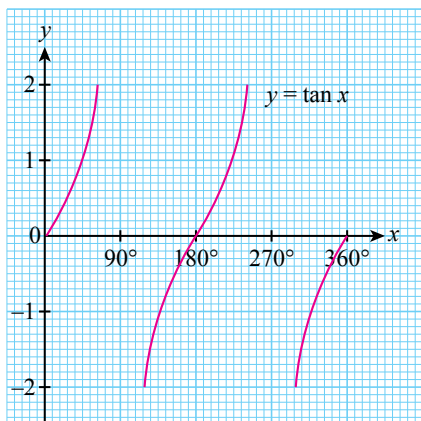
- mempunyai nilai maksimum 1 apabila $x = 90^\circ$ dan nilai minimum -1 apabila $x = 270^\circ$
- memintas paksi- x pada $x = 0^\circ$, 180° dan 360° (pintasan- x)
- memintas paksi- y pada $y = 0$ (pintasan- y)

Graf kosinus, $y = \cos x$



- mempunyai nilai maksimum 1 apabila $x = 0^\circ$ dan 360° dan nilai minimum -1 apabila $x = 180^\circ$
- memintas paksi- x pada $x = 90^\circ$ dan 270° (pintasan- x)
- memintas paksi- y pada $y = 1$ (pintasan- y)

Graf tangen, $y = \tan x$



- nilai maksimum ialah ∞ dan nilai minimum ialah $-\infty$
- memintas paksi- x pada $x = 0^\circ$, 180° dan 360° (pintasan- x)
- memintas paksi- y pada $y = 0$ (pintasan- y)
- nilai $\tan 90^\circ$ dan $\tan 270^\circ$ tidak tertakrif

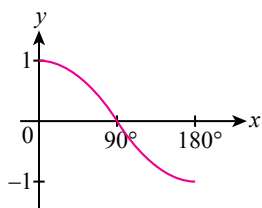


- Apakah yang dimaksudkan dengan nilai tidak tertakrif?
- Mengapakah $\tan 90^\circ$ dan $\tan 270^\circ$ tidak tertakrif?

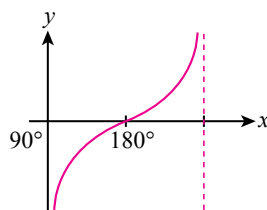
Latih Kendiri 6.2a

1. Tentukan sama ada setiap graf trigonometri berikut ialah graf sinus, kosinus atau tangen.

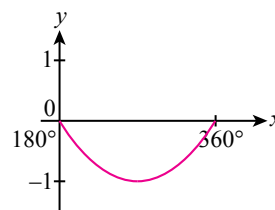
(a)



(b)



(c)



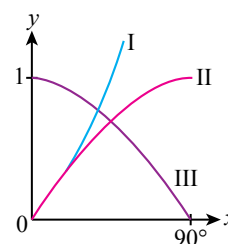
2. (a) Lakar graf $y = \sin x$ dengan keadaan $90^\circ \leq x \leq 270^\circ$.

(b) Lakar graf $y = \cos x$ dengan keadaan $45^\circ \leq x \leq 225^\circ$.

3. Rajah di sebelah menunjukkan tiga graf trigonometri bagi sudut di antara 0° dengan 90° .

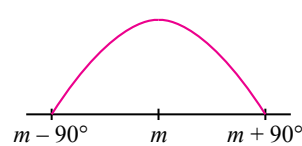
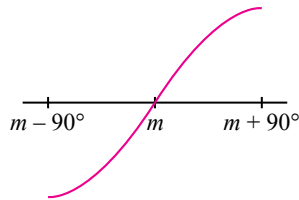
(a) Kenal pasti persamaan graf I, II dan III.

(b) Nyatakan nilai maksimum dan nilai minimum graf I, II dan III, jika ada.



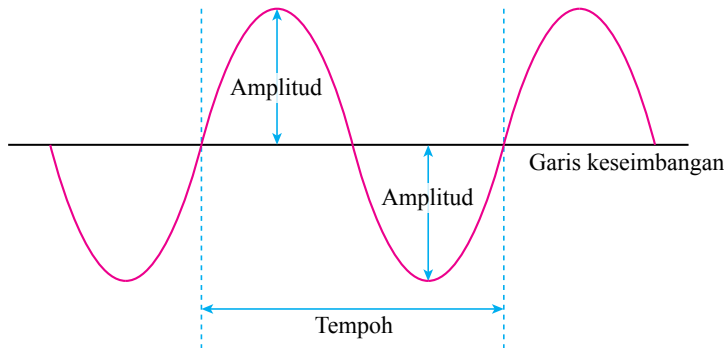
4. Bagi setiap fungsi trigonometri berikut, nyatakan nilai x apabila nilai y adalah maksimum dan nyatakan nilai maksimum tersebut.
- $y = \sin x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
 - $y = \cos x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
 - $y = \tan x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

5. Setiap rajah di bawah menunjukkan sebahagian daripada graf fungsi trigonometri dengan keadaan $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. Nyatakan fungsi itu dan nilai m .
- -



Apakah kesan perubahan pemalar a , b dan c bagi graf fungsi trigonometri $y = a \sin bx + c$, $y = a \cos bx + c$ dan $y = a \tan bx + c$?

Rajah di bawah menunjukkan ciri-ciri fungsi berkala, iaitu tempoh dan amplitud.



Standard Pembelajaran

Mengkaji dan membuat generalisasi tentang kesan perubahan pemalar a , b dan c bagi graf fungsi trigonometri:

- $y = a \sin bx + c$
 - $y = a \cos bx + c$
 - $y = a \tan bx + c$
- bagi $a > 0$, $b > 0$.

TiP Bestari

Amplitud juga dapat ditentukan dengan rumus:

$$\left(\frac{\text{nilai maksimum} - \text{nilai minimum}}{2} \right)$$

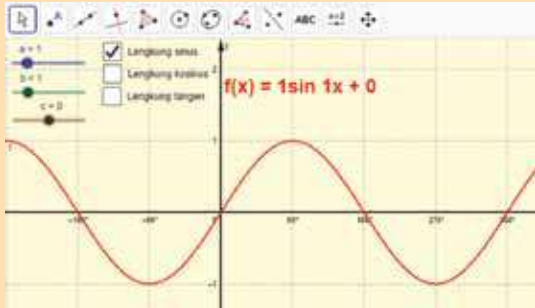
Tempoh ialah selang satu kitaran lengkap. Fungsi trigonometri ialah fungsi berkala. Graf fungsi trigonometri berulang bagi setiap selang tertentu. Misalnya, graf fungsi sinus berulang bagi setiap selang 360° . Kita boleh mengatakan fungsi $y = \sin x$ ialah fungsi yang berkala dengan tempoh 360° . Amplitud pula ialah jarak maksimum yang diukur dari garis keseimbangan.

Jika diberi fungsi trigonometri $y = a \sin bx + c$, $y = a \cos bx + c$ dan $y = a \tan bx + c$, apakah yang akan berlaku kepada bentuk dan kedudukan graf fungsi trigonometri jika nilai pemalar a , b dan c berubah?

Tujuan: Mengkaji dan membuat generalisasi tentang kesan perubahan pemalar a , b dan c bagi graf fungsi trigonometri $y = a \sin bx + c$, $y = a \cos bx + c$ dan $y = a \tan bx + c$.

Langkah:

1. Buka fail GGB603 untuk aktiviti ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB603 untuk mendapatkan fail GeoGebra aktiviti ini.

2. Seret gelongsor nilai a dan perhatikan perubahan pada graf yang dipaparkan.
3. Seret gelongsor nilai b dan perhatikan perubahan pada graf yang dipaparkan.
4. Seret gelongsor nilai c dan perhatikan perubahan pada graf yang dipaparkan.
5. Ulangi langkah 2 hingga 4 untuk 'Lengkung kosinus' dan 'Lengkung tangen'.

Perbincangan:

Apakah kesimpulan anda tentang kesan perubahan pemalar a , b dan c bagi graf fungsi trigonometri $y = a \sin bx + c$, $y = a \cos bx + c$ dan $y = a \tan bx + c$ dengan keadaan $a > 0$, $b > 0$?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 4, didapati bahawa

- (a) apabila a berubah, nilai maksimum dan minimum berubah,
 - (b) apabila b berubah, graf akan termampat atau mengembang,
 - (c) apabila c berubah, graf akan beranjak secara menegak ke atas atau ke bawah.
- Nilai a mempengaruhi amplitud fungsi, nilai b mempengaruhi tempoh fungsi dan nilai c mempengaruhi kedudukan graf fungsi.

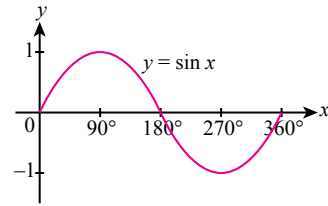
Secara umumnya,

	$y = a \sin bx + c$, $a > 0, b > 0$	$y = a \cos bx + c$, $a > 0, b > 0$	$y = a \tan bx + c$, $a > 0, b > 0$
Nilai a berubah	• Nilai maksimum dan nilai minimum berubah • Amplitud fungsi = a		• Lengkung graf berubah • Tiada amplitud
Nilai b berubah	• Tempoh fungsi berubah • Apabila nilai b bertambah, graf kelihatan mampat secara mengufuk, tempoh fungsi semakin berkurang • Tempoh fungsi sinus dan kosinus = $\frac{360^\circ}{b}$; Tempoh fungsi tangen = $\frac{180^\circ}{b}$		
Nilai c berubah	• Kedudukan graf berubah • Apabila $c > 0$, graf beranjak c unit secara menegak ke atas paksi-x • Apabila $c < 0$, graf beranjak c unit secara menegak ke bawah paksi-x		

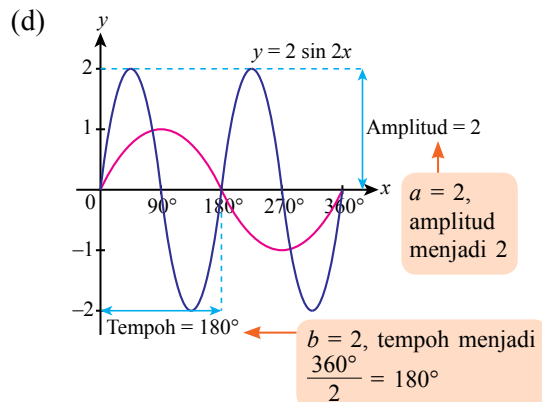
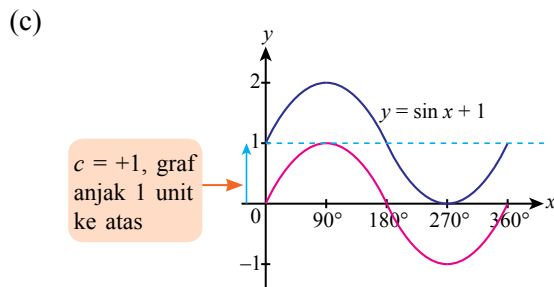
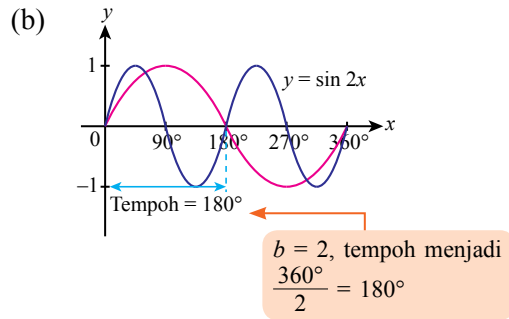
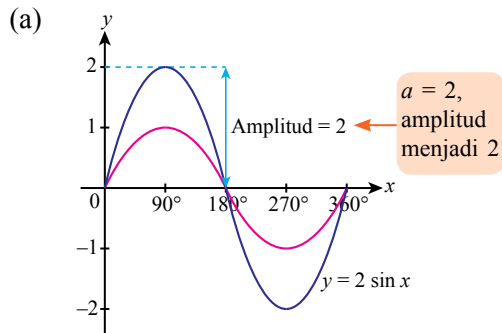
Contoh 9

Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi $y = \sin x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. Lakar setiap fungsi trigonometri berikut pada paksi yang sama.

- (a) $y = 2 \sin x$ (b) $y = \sin 2x$
(c) $y = \sin x + 1$ (d) $y = 2 \sin 2x$



Penyelesaian:

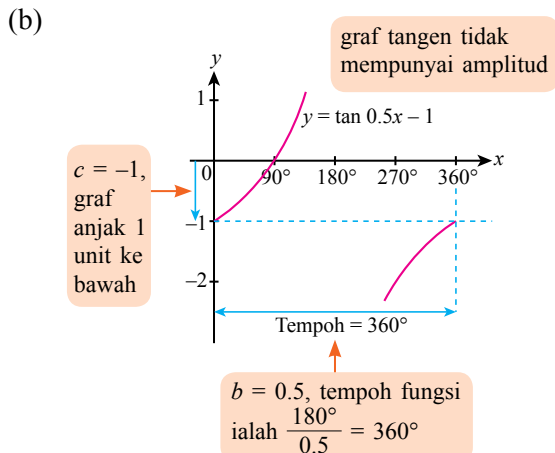
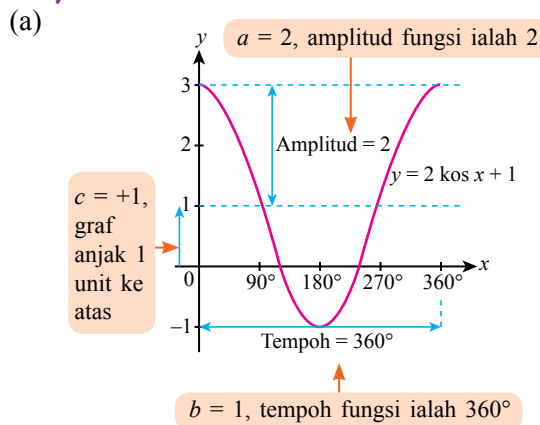


Contoh 10

Lakar setiap fungsi trigonometri berikut bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

- (a) $y = 2 \cos x + 1$ (b) $y = \tan 0.5x - 1$

Penyelesaian:



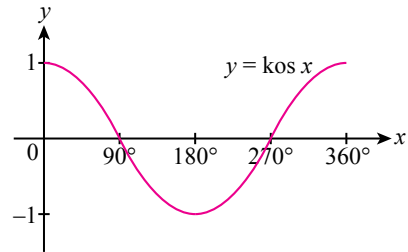
Latih Kendiri 6.2b

1. Tentukan amplitud dan tempoh bagi setiap fungsi trigonometri berikut.

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------|
| (a) $y = 4 \sin x$ | (b) $y = 3 \sin 2x$ | (c) $y = 2 \sin 3x - 4$ |
| (d) $y = \cos 4x$ | (e) $y = 4 \cos 2x$ | (f) $y = 3 \cos 3x + 1$ |
| (g) $y = \frac{1}{3} \tan 3x$ | (h) $y = 3 \tan \frac{1}{3}x$ | (i) $y = 3 \tan 2x + 2$ |

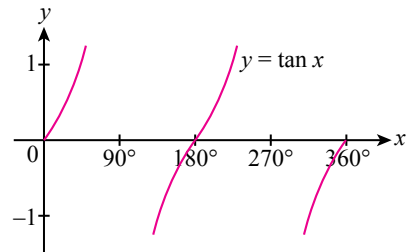
2. Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi $y = \cos x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. Lakar setiap fungsi trigonometri berikut pada paksi yang sama.

- (a) $y = \frac{1}{2} \cos x$
 (b) $y = \cos \frac{x}{2}$
 (c) $y = \cos x - 2$



3. Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi $y = \tan x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. Lakar setiap fungsi trigonometri berikut pada paksi yang sama.

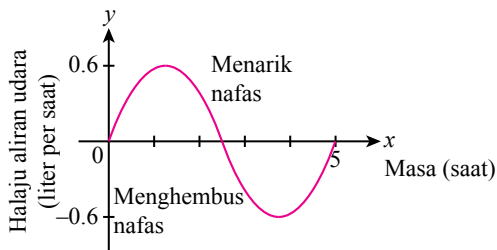
- (a) $y = \tan 2x$
 (b) $y = \tan x + 2$



Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan graf fungsi trigonometri?

Contoh 11

Halaju aliran udara
dalam kitaran pernafasan normal



Graf di atas menunjukkan satu kitaran pernafasan yang lengkap. Kitaran ini terdiri daripada proses menarik nafas dan menghembuskan nafas. Kitaran ini berlaku setiap 5 saat. Halaju aliran udara adalah positif apabila kita menarik nafas dan negatif apabila kita menghembuskan nafas. Halaju ini diukur dalam liter per saat.

- (a) Jika y mewakili halaju aliran udara selepas x saat, nyatakan satu fungsi dalam bentuk $y = a \sin bx + c$ yang memodelkan aliran udara dalam kitaran pernafasan normal yang ditunjukkan seperti graf di atas.
- (b) Berapakah halaju aliran udara, dalam liter per saat, apabila masa ialah 7 saat?

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan graf fungsi sinus, kosinus dan tangen.

Penyelesaian:

- (a) Daripada graf, amplitud = 0.6, maka
- $a = 0.6$

$$\text{tempoh} = 5 \text{ saat, maka } \frac{360^\circ}{b} = 5$$

$$b = 72$$

tiada pergerakan ke atas atau ke bawah paksi- x , maka $c = 0$

Maka, fungsi yang memodelkan aliran udara dalam kitaran pernafasan normal yang ditunjukkan seperti graf ialah $y = 0.6 \sin 72x$.

- (b)
- $y = 0.6 \sin 72x$

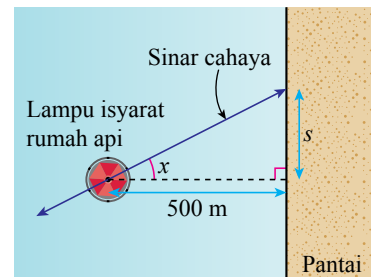
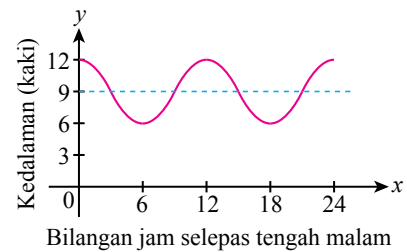
Apabila $x = 7$, $y = 0.6 \sin (72 \times 7)$

$$y = 0.35$$

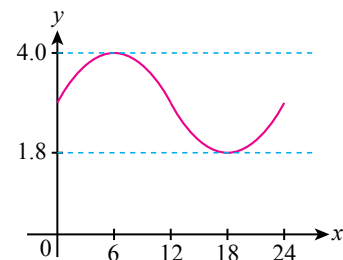
Maka, halaju aliran udara ialah 0.35 liter per saat pada masa 7 saat.

Latih Kendiri 6.2c

- Graf di sebelah menunjukkan kedalaman air yang direkodkan di suatu limbungan kapal.
 - Jika y mewakili kedalaman air, dalam kaki, dan x mewakili bilangan jam selepas tengah malam, guna fungsi dalam bentuk $y = a \cos bx + c$ untuk memodelkan kedalaman air yang ditunjukkan seperti graf tersebut.
 - Jam keberapakah kedudukan air paling dalam?
- Rajah di sebelah menunjukkan pandangan atas sebuah rumah api. Lampu isyarat rumah api menghantar sinar cahaya seperti dalam rajah. Apabila lampu isyarat berputar, sinar cahaya bergerak di sepanjang pantai pada sudut x .
 - Tulis satu fungsi bagi jarak s .
 - Nyatakan amplitud dan tempoh fungsi itu.

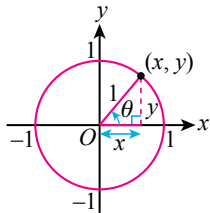


- Graf di sebelah menggambarkan aras air yang direkodkan di sebuah pelabuhan. Diberi y mewakili aras air, dalam m, dan x mewakili masa, dalam jam. Nyatakan fungsi trigonometri bagi graf tersebut dalam bentuk $y = a \sin bx + c$.



Arena Rumusan

Bulatan unit

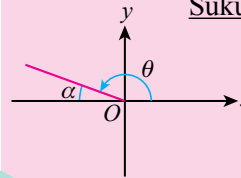


$$\begin{aligned}\sin \theta &= \text{koordinat-}y \\ \cos \theta &= \text{koordinat-}x \\ \tan \theta &= \frac{\text{koordinat-}y}{\text{koordinat-}x}\end{aligned}$$

Sudut rujukan sepadan

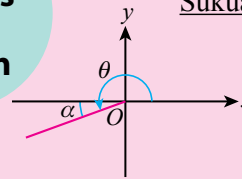
Katakan α ialah sudut rujukan sepadan

Sukuan II



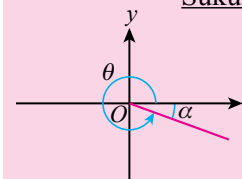
$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ - \theta \\ \sin \theta &= +\sin \alpha \\ \cos \theta &= -\cos \alpha \\ \tan \theta &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

Sukuan III



$$\begin{aligned}\alpha &= \theta - 180^\circ \\ \sin \theta &= -\sin \alpha \\ \cos \theta &= -\cos \alpha \\ \tan \theta &= +\tan \alpha\end{aligned}$$

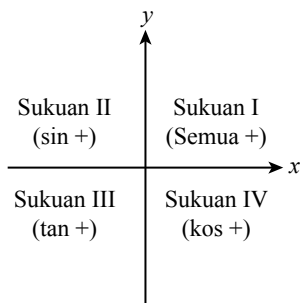
Sukuan IV



$$\begin{aligned}\alpha &= 360^\circ - \theta \\ \sin \theta &= -\sin \alpha \\ \cos \theta &= +\cos \alpha \\ \tan \theta &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

**Sinus,
Kosinus
dan
Tangen**

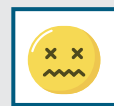
Tanda nilai $\sin \theta$, $\cos \theta$ dan $\tan \theta$



Graf $\sin x$, $\cos x$ dan $\tan x$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
Bentuk graf			
Nilai maksimum	1	1	∞
Nilai minimum	-1	-1	$-\infty$
Pintasan-x	$0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$	$90^\circ, 270^\circ$	$0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$
Pintasan-y	0	1	0

Refleksi



Pada akhir bab ini, saya dapat

membuat dan menentusahkan konjektur tentang nilai sinus, kosinus dan tangen sudut dalam sukuan II, III dan IV dengan sudut rujukan sepadan.

menentukan nilai sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV berdasarkan sudut rujukan sepadan.

menentukan sudut apabila nilai sinus, kosinus dan tangen sudut tersebut diberi.

menyelesaikan masalah yang melibatkan sinus, kosinus dan tangen.

melukis graf fungsi trigonometri, $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan $y = \tan x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ dan membandingbezakan ciri-ciri graf fungsi tersebut.

mengkaji dan membuat generalisasi tentang kesan perubahan pemalar a , b dan c bagi graf fungsi trigonometri:

(i) $y = a \sin bx + c$

(ii) $y = a \cos bx + c$

(iii) $y = a \tan bx + c$

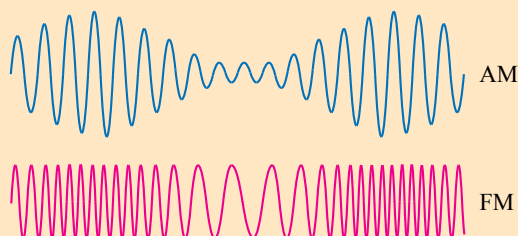
bagi $a > 0$, $b > 0$.

menyelesaikan masalah yang melibatkan graf fungsi sinus, kosinus dan tangen.

PROJEK MINI

Siaran radio merupakan contoh komunikasi elektronik yang senang didapati pada masa ini. Bunyi seperti muzik dan suara yang kita dengar dari radio disiarkan dalam bentuk gelombang. Dalam kes radio AM, bunyi disiarkan melalui modulasi amplitud manakala bagi radio FM, bunyi disiarkan melalui modulasi frekuensi.

Dalam kumpulan berempat, buat satu laporan ringkas yang menjelaskan perbezaan antara modulasi amplitud dengan modulasi frekuensi berdasarkan ciri-ciri graf fungsi trigonometri yang telah anda pelajari. Anda digalakkan menggunakan graf, jadual dan peta pemikiran yang sesuai untuk mempersembahkan laporan kumpulan anda.



Latih Ekstensif

Imbas kod QR atau layari
bit.do/Kuiz06 untuk kuiz interaktif

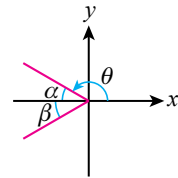


FAHAM

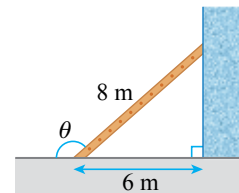
- Nyatakan hubungan setiap fungsi trigonometri yang berikut dengan sudut rujukan sepadan.
(a) $\tan 154^\circ$ (b) $\sin 234^\circ$ (c) $\cos 314^\circ$
- Tentukan nilai setiap sudut berikut berdasarkan sudut rujukan sepadan.
(a) $\cos 116^\circ$ (b) $\tan 211^\circ 38'$ (c) $\sin 305.6^\circ$
- Diberi $\tan \theta = -0.7265$ dan $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, hitung sudut θ .
- Lakar graf $y = \cos x$ bagi $90^\circ \leq x \leq 270^\circ$.

MASTERI

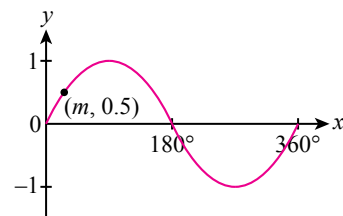
- Nyatakan nilai maksimum dan nilai minimum bagi graf fungsi $y = 3 \sin 2x - 1$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
- Dalam rajah di sebelah, $\theta = 150^\circ$ dan $\alpha = \beta$. Tentukan nilai
(a) $\cos \alpha$
(b) $\tan \beta$



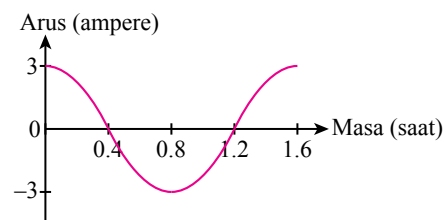
- Rajah di sebelah menunjukkan sebatang kayu dengan panjang 8 m disandarkan pada dinding tegak. Jarak mengufuk dari dinding ke kayu itu ialah 6 m. Hitung nilai $\sin \theta$.



- Lakar graf fungsi $y = 3 \sin 2x + 1$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
- Rajah di sebelah menunjukkan graf suatu fungsi trigonometri bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
(a) Nyatakan fungsi trigonometri tersebut.
(b) Tentukan nilai m .

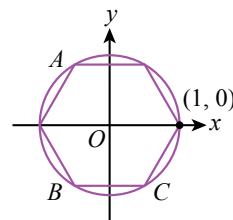


- Rajah di sebelah menunjukkan graf yang diperoleh pada skrin sebuah osiloskop apabila suatu bekalan arus ulang alik disambungkan kepadanya.
(a) Apakah jenis fungsi trigonometri yang diwakili oleh graf itu?
(b) Nyatakan amplitud arus itu.
(c) Nyatakan tempoh arus itu.

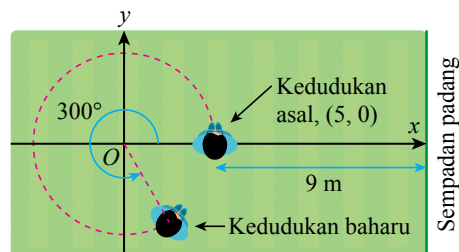


CABAR

11. Satu heksagon sekata dilukis di dalam bulatan unit seperti ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Jika satu daripada bucu heksagon itu berada pada $(1, 0)$, tentukan koordinat bucu A , B dan C .



12. Pasukan pancaragam sekolah anda membuat persembahan di padang. Ahli-ahli pancaragam membuat formasi berbentuk bulatan dengan diameter 10 m. Andaikan anda seorang daripada ahli pancaragam tersebut dan kedudukan asal anda ialah 9 m dari sempadan padang. Anda bergerak dan kedudukan baharu anda adalah seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah.

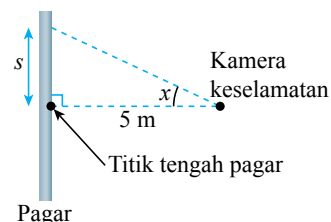


Jika anda dikehendaki bergerak ke sempadan padang dari kedudukan baharu anda, berapakah jarak terpendek, dalam m, yang akan anda lalui?

13. Jadual di bawah menunjukkan ketinggian kedudukan Ming Seng dari tanah mengufuk semasa dia menaiki roda Ferris.

Masa (minit)	0	2	4	6	8
Tinggi (m)	20	31	20	9	20

- (a) Berdasarkan jadual di atas, nyatakan jenis fungsi trigonometri yang boleh mewakilinya.
 (b) Seterusnya, jika y ialah ketinggian kedudukan Ming Seng dari tanah mengufuk, dalam m, dan x ialah masa dalam minit, lakarkan graf dan nyatakan fungsi trigonometri yang mewakili maklumat di atas.
14. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah kamera keselamatan di depan pagar sebuah pangsapuri. Kamera itu dipasang pada tiang yang terletak 5 m dari titik tengah pagar. Tulis satu fungsi trigonometri yang mengungkapkan jarak, s , dalam m, di sepanjang pagar dari titik tengahnya dalam sebutan x .



TEROKAI MATEMATIK

Tahukah anda bahawa fungsi trigonometri boleh diaplikasikan semasa memprogramkan lompatan sesuatu watak dalam permainan komputer?

Cuba kaitkan corak pergerakan watak dalam permainan komputer dengan fungsi trigonometri. Dapatkan maklumat yang berkaitan daripada sumber yang sah seperti menemu ramah seorang pengatur cara, merujuk bahan bacaan atau lain-lain. Tulis satu jurnal ringkas mengenai

- ciri-ciri fungsi trigonometri,
- penggunaan fungsi trigonometri dalam permainan komputer,
- dua contoh lain aplikasi kehidupan sebenar yang melibatkan fungsi trigonometri.

BAB 7

Sukatan Serakan Data Terkumpul

Apakah yang akan anda pelajari?

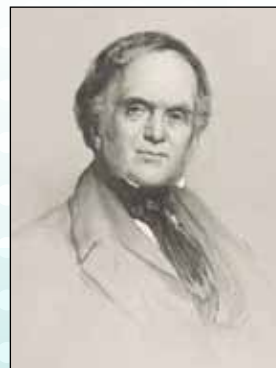
- Serakan
- Sukatan Serakan

Maslahat Bab Ini

Analisis statistik seperti sukatan serakan digunakan secara meluas dalam pelbagai bidang seperti perubatan, pertanian, kewangan, sains sosial dan sebagainya. Bidang pekerjaan yang mengaplikasikan analisis statistik antaranya adalah seperti ahli biometrik, ahli aktuari dan penganalisis kewangan yang menggunakan data raya untuk mendapatkan satu nilai statistik dan seterusnya mewakili data tersebut menggunakan graf statistik.

Tahukah Anda?

William Playfair (1759-1823) ialah seorang ahli ekonomi berbangsa Scotland yang telah menggunakan pelbagai graf statistik dalam penulisan, *The Commercial and Political Atlas* pada tahun 1786.



Untuk maklumat lanjut:



bit.do/TahukahAndaBab7

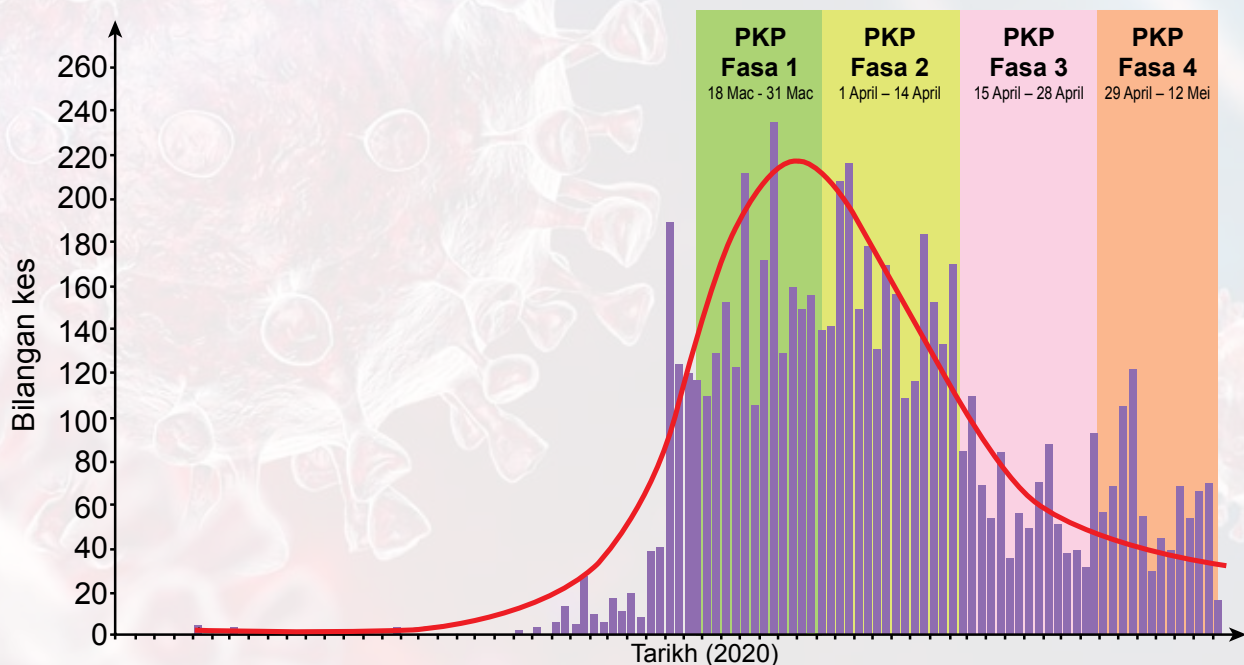
GERBANG ISTILAH



data terkumpul
histogram
histogram longgokan
kekerapan longgokan
kuartil
ogive
penyiasatan statistik
persentil
poligon kekerapan

grouped data
histogram
cumulative histogram
cumulative frequency
quartile
ogive
statistical investigation
percentile
frequency polygon

Bilangan Kes Harian Covid-19 di Malaysia



Sumber: Kementerian Kesihatan Malaysia, Julai 2020

Pandemik Covid-19 yang melanda negara kita pada awal tahun 2020 telah mengubah norma kehidupan rakyat Malaysia. Kepantasan dan kecekapan pihak berkuasa dalam menangani pandemik ini telah membantu Malaysia mengawal kenaikan kes pesakit yang dijangkiti virus ini. Malaysia telah berjaya melandaikan graf bilangan kes jangkitan harian dengan adanya pelaksanaan Perintah Kawalan Pergerakan (PKP). Pada pendapat anda, bagaimanakah bentuk graf bilangan kes jangkitan harian di Malaysia jika pelaksanaan PKP ini tidak dilakukan?

7.1 Serakan

Bagaimanakah membina histogram dan poligon kekerapan?

Semasa di Tingkatan 4, anda telah mempelajari cara mentafsir serakan bagi data tak terkumpul menggunakan plot batang-dan-daun dan plot titik. Bagi suatu set data terkumpul, kita boleh melihat serakan dengan membina histogram dan poligon kekerapan bagi data tersebut. Sebelum membina histogram dan poligon kekerapan, anda perlu mengetahui selang kelas, had bawah, had atas, titik tengah, sempadan bawah, sempadan atas dan kekerapan longgokan yang boleh diperolehi daripada jadual kekerapan.

Standard Pembelajaran

Membina histogram dan poligon kekerapan bagi suatu set data terkumpul.

Buletin Ilmiah

Selang kelas ialah ukuran julat bagi suatu pembahagian data.

MOBILISASI MINDA 1 Berkumpulan

Tujuan: Mengenal pasti had bawah, had atas, titik tengah, sempadan bawah dan sempadan atas bagi suatu set data.

Langkah:

Diberi suatu set data bagi wang saku harian, dalam RM, yang diterima oleh 20 orang murid pada suatu hari tertentu.

8	10	4	7	1
5	2	8	11	4
5	7	15	3	4
14	12	7	11	9

1. Kenal pasti data terkecil dan data terbesar.
2. Merujuk kepada data, kumpulkan data kepada 3, 4, 5 atau 6 bahagian mengikut urutan. Contoh, satu kumpulan dengan 3 bahagian yang seragam bermaksud 1 – 5, 6 – 10 dan 11 – 15.
3. Dengan menggunakan kaedah gundalan, pilih dan masukkan data dalam bahagian kumpulan data yang telah ditentukan.
4. Berdasarkan setiap bahagian data, tentukan
 - (a) had bawah (nilai terkecil dalam suatu bahagian data) dan had atas (nilai terbesar dalam suatu bahagian data),
 - (b) titik tengah setiap bahagian data,
 - (c) (i) nilai pertengahan antara had bawah suatu bahagian dengan had atas bahagian sebelumnya,
 - (ii) nilai pertengahan antara had atas suatu bahagian dengan had bawah bahagian selepasnya.
5. Lengkapkan jadual kekerapan dengan hasil dari langkah 3, 4(a), 4(b), 4(c)(i) dan 4(c)(ii) seperti di bawah.

Wang saku (RM)	Kekerapan	Langkah 4(a)		Langkah 4(b)	Langkah 4(c)	
		Had bawah	Had atas	Titik tengah	(i)	(ii)

Perbincangan:

Bincang dan tuliskan definisi bagi menentukan had bawah, had atas, titik tengah, sempadan bawah dan sempadan atas bagi suatu set data.

Hasil daripada Mobilisasi Minda 1, didapati bahawa;

$$\text{Saiz selang kelas} = \left(\frac{\text{Nilai data terbesar} - \text{Nilai data terkecil}}{\text{Bilangan kelas}} \right)$$

Had bawah ialah nilai terkecil dan had atas ialah nilai terbesar dalam setiap selang kelas.

$$\text{Titik tengah} = \left(\frac{\text{Had bawah} + \text{Had atas}}{2} \right)$$

Sempadan bawah

$$= \left(\frac{\text{Had atas kelas sebelumnya} + \text{Had bawah kelas itu}}{2} \right)$$

Sempadan atas

$$= \left(\frac{\text{Had atas kelas itu} + \text{Had bawah kelas selepasnya}}{2} \right)$$

Contoh 1

Set data di sebelah menunjukkan tinggi, kepada cm yang terhampir, bagi sekumpulan murid Tingkatan 5.

153	168	163	157
158	161	165	162
145	150	158	156
166	163	152	155
158	173	148	164

- Tentukan selang kelas yang sesuai supaya bilangan kelas menjadi 6.
- Bina jadual kekerapan berdasarkan maklumat di (a). Seterusnya, lengkapkan jadual kekerapan tersebut dengan had bawah, had atas, titik tengah, sempadan bawah dan sempadan atas.

i-Teknologi

Imbas kod QR atau layari bit.do/LKBab7i untuk menerokai cara mengorganisasi data mentah dalam jadual kekerapan menggunakan hamparan elektronik.



Penyelesaian:

- Data terbesar ialah 173 dan data terkecil ialah 145. Jika bilangan kelas yang dikehendaki ialah 6, maka saiz setiap selang kelas

$$= \frac{173 - 145}{6} = 4.7 \approx 5$$

Saiz setiap selang kelas

$$= \left(\frac{\text{Nilai data terbesar} - \text{Nilai data terkecil}}{\text{Bilangan kelas}} \right)$$

Maka, selang kelas yang sesuai ialah 145 – 149, 150 – 154, 155 – 159, 160 – 164, 165 – 169 dan 170 – 174.

Tinggi (cm)	Kekerapan	Had bawah	Had atas	Titik tengah	Sempadan bawah	Sempadan atas
145 – 149	2	145	149	147	144.5	149.5
150 – 154	3	150	154	152	149.5	154.5
155 – 159	6	155	159	157	154.5	159.5
160 – 164	5	160	164	162	159.5	164.5
165 – 169	3	165	169	167	164.5	169.5
170 – 174	1	170	174	172	169.5	174.5

Bagi suatu data terkumpul dalam selang kelas yang seragam, saiz selang kelas boleh dihitung dengan dua kaedah.

Kaedah 1: Beza antara had bawah atau had atas bagi dua kelas yang berturutan.

Saiz selang kelas bagi dua kelas pertama

$$= 150 - 145 \leftarrow \begin{array}{l} \text{Had bawah kelas} \\ 145 - 149 \end{array}$$

$$= 5$$

atau

$$= 154 - 149 \leftarrow \begin{array}{l} \text{Had atas kelas} \\ 145 - 149 \end{array}$$

$$= 5$$

$$\leftarrow \begin{array}{l} \text{Had atas kelas} \\ 150 - 154 \end{array}$$

Kaedah 2: Beza antara sempadan atas dengan sempadan bawah bagi suatu selang kelas.

Saiz selang kelas bagi kelas pertama

$$= 149.5 - 144.5 \leftarrow \begin{array}{l} \text{Sempadan bawah} \\ \text{kelas } 145 - 149 \end{array}$$

$$= 5$$

$$\leftarrow \begin{array}{l} \text{Sempadan atas} \\ \text{kelas } 145 - 149 \end{array}$$

TiP Bestari

Bagi menentukan saiz selang kelas, elakkan penggunaan had bawah dan had atas suatu kelas. Misalnya, bagi selang kelas 145 – 149, saiz selang kelas = 149 – 145 = 4 (Tidak benar)

Kekerapan longgokan bagi suatu data juga boleh diperoleh daripada jadual kekerapan. **Kekerapan longgokan** bagi suatu selang kelas ialah hasil tambah kekerapan bagi suatu selang kelas itu dengan jumlah kekerapan kelas-kelas sebelumnya. Hal ini memberikan suatu kekerapan longgokan dalam tertib menaik.

Contoh 2

Bina jadual kekerapan longgokan daripada jadual kekerapan di bawah.

Umur	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59
Kekerapan	4	5	8	7	3

Penyelesaian:

Umur	Kekerapan	Kekerapan longgokan
10 – 19	4	4
20 – 29	5	9
30 – 39	8	17
40 – 49	7	24
50 – 59	3	27

Nilai 17 ini bermaksud terdapat 17 orang berumur 39 tahun dan kurang

Buletin Ilmiah

Dalam Contoh 1, kelas 150 – 154 sebenarnya merangkumi nilai-nilai dari 149.5 hingga 154.5 kerana data ini merupakan data selang. Sempadan bawah 149.5 dan sempadan atas 154.5 digunakan untuk mengasingkan kelas supaya tidak wujud ruang antara 149 cm dengan 150 cm dan 154 cm dengan 155 cm.

Buletin Ilmiah

- Data selang ialah data yang diukur mengikut skala yang berterusan. Misalnya, masa yang diambil oleh murid membeli makanan di kantin, dan ketinggian murid.
- Data diskret ialah data yang melibatkan pengiraan. Misalnya, bilangan murid dalam Kelab Matematik.

Histogram

Histogram ialah satu perwakilan grafik yang telah dikumpulkan dalam julat dengan menggunakan palang bersebelahan. Tinggi palang dalam histogram mewakili kekerapan sesuatu kelas. Langkah-langkah membina histogram:

Cari sempadan bawah dan sempadan atas setiap selang kelas.



Pilih skala yang sesuai pada paksi mencancang. Wakilkan kekerapan pada paksi mencancang dan sempadan kelas pada paksi mengufuk.



Lukis palang yang mewakili setiap selang kelas dengan lebarnya sama dengan saiz selang kelas dan tingginya berkadaran dengan kekerapan.

Poligon Kekerapan

Poligon kekerapan ialah satu graf yang memaparkan data terkumpul menggunakan garis lurus dengan cara menyambungkan titik tengah setiap kelas pada hujung atas setiap palang dalam histogram. Langkah-langkah membina poligon kekerapan:

Tandakan titik tengah pada atas palang setiap selang kelas.



Tandakan titik tengah sebelum kelas pertama dan selepas kelas terakhir dengan kekerapan sifar.



Lukis garis lurus yang menyambungkan titik-titik tengah yang bersebelahan.

Buletin Ilmiah

Histogram dan poligon kekerapan boleh dibina hanya menggunakan data selangar.

Contoh 3

Jadual kekerapan di bawah menunjukkan kelajuan kereta dalam km j^{-1} , yang direkod oleh kamera perangkap laju di sebatang lebuh raya dalam suatu tempoh masa tertentu. Wakilkan data tersebut dengan histogram dan poligon kekerapan menggunakan skala 2 cm kepada 10 km j^{-1} pada paksi mengufuk dan 2 cm kepada 10 buah kereta pada paksi mencancang.

Laju (km j^{-1})	70 – 79	80 – 89	90 – 99	100 – 109	110 – 119	120 – 129
Bilangan kereta	5	10	20	30	25	10

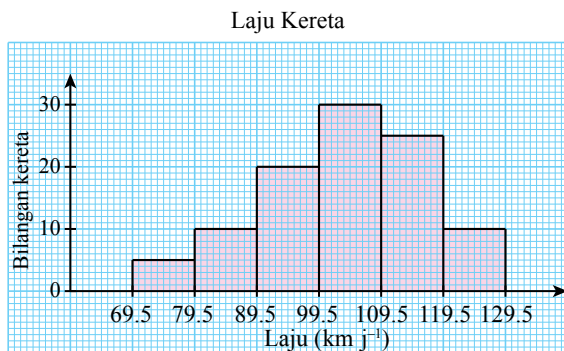
Penyelesaian:

Laju (km j^{-1})	Bilangan kereta	Titik tengah	Sempadan bawah	Sempadan atas
70 – 79	5	74.5	69.5	79.5
80 – 89	10	84.5	79.5	89.5
90 – 99	20	94.5	89.5	99.5
100 – 109	30	104.5	99.5	109.5
110 – 119	25	114.5	109.5	119.5
120 – 129	10	124.5	119.5	129.5

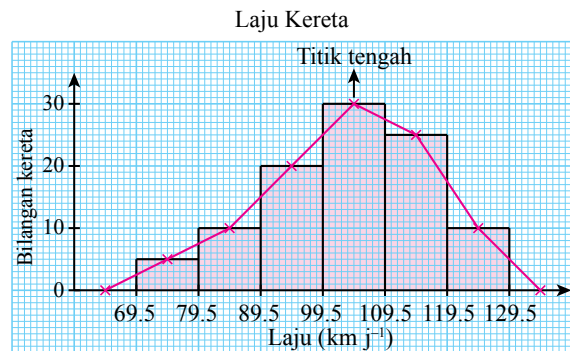


Dengan menggunakan poligon kekerapan, jelaskan kelajuan kereta lebih daripada 90 km j^{-1} .

Histogram:



Poligon kekerapan:



Poligon kekerapan juga boleh dibina tanpa perlu membina histogram terlebih dahulu. Langkah-langkah membina poligon kekerapan daripada jadual kekerapan:

Tambah satu selang kelas sebelum kelas pertama dan selepas kelas terakhir dengan kekerapan sifar.

Cari titik tengah setiap selang kelas tersebut.

Pilih skala yang sesuai pada paksi mencancang. Wakilkan kekerapan pada paksi mencancang dan titik tengah pada paksi mengufuk.

Tandakan titik tengah dengan kekerapan yang sepadan.

Sambungkan setiap titik tengah dengan garis lurus.

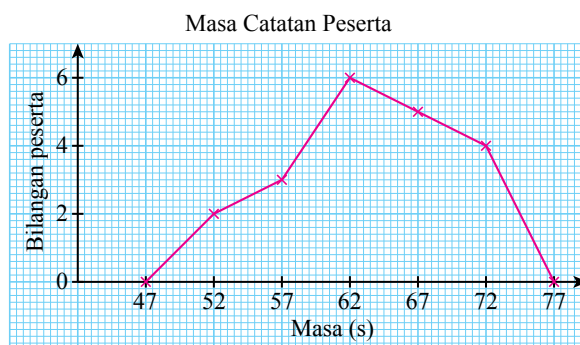
Contoh 4

Jadual kekerapan di bawah menunjukkan masa dalam saat, yang dicatatkan oleh 20 orang peserta dalam satu pusingan kelayakan pertandingan berenang. Wakilkan data tersebut dengan poligon kekerapan menggunakan skala 2 cm kepada 5 saat pada paksi mengufuk dan 2 cm kepada 2 orang peserta pada paksi mencancang.

Masa yang dicatatkan (s)	50 – 54	55 – 59	60 – 64	65 – 69	70 – 74
Bilangan peserta	2	3	6	5	4

Penyelesaian:

Masa yang dicatatkan (s)	Bilangan peserta	Titik tengah
45 – 49	0	47
50 – 54	2	52
55 – 59	3	57
60 – 64	6	62
65 – 69	5	67
70 – 74	4	72
75 – 79	0	77



Tambah selang kelas dengan kekerapan sifar sebelum selang kelas pertama dan selepas selang kelas terakhir

Latih Kendiri 7.1a

- Data di bawah menunjukkan masa yang diambil oleh 50 orang murid yang datang ke sekolah dari rumah mereka. Masa yang dicatatkan dalam minit terdekat.

6	15	32	16	18	31	38	20	17	32
18	8	25	35	13	24	14	8	8	25
16	25	30	10	18	14	14	10	25	30
23	30	12	18	6	23	1	15	30	12
40	15	5	14	22	49	12	19	33	25

Bina satu jadual kekerapan supaya bilangan kelas menjadi 5. Kemudian, nyatakan had bawah, had atas, titik tengah, sempadan bawah dan sempadan atas bagi setiap selang kelas.

2. Jadual kekerapan di bawah menunjukkan jisim dalam kg, bayi yang baru lahir di sebuah hospital dalam satu bulan. Nyatakan titik tengah, had bawah, had atas, sempadan bawah, sempadan atas dan kekerapan longgokan bagi data tersebut.

Jisim (kg)	2.0 – 2.4	2.5 – 2.9	3.0 – 3.4	3.5 – 3.9	4.0 – 4.4
Bilangan bayi	9	15	24	20	10

3. Jadual kekerapan di bawah menunjukkan jumlah jam tidur dalam sehari bagi sekumpulan pekerja di sebuah kilang. Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 jam pada paksi mengufuk dan 2 cm kepada 20 orang pekerja pada paksi mencancang, bina histogram dan poligon kekerapan pada graf yang sama bagi mewakili data tersebut.

Jumlah jam tidur sehari	4.05–5.04	5.05–6.04	6.05–7.04	7.05–8.04	8.05–9.04	9.05–10.04	10.05–11.04
Bilangan pekerja	2	4	22	64	90	14	2

4. Jadual kekerapan di bawah menunjukkan tinggi dalam m, pokok tebu atau juga dikenali sebagai *Saccharum officinarum* yang diambil dari ladang. Wakilkan data tersebut kepada poligon kekerapan dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 m pada paksi mengufuk dan 2 cm kepada 10 batang tebu pada paksi mencancang.

Tinggi (m)	1.0 – 1.9	2.0 – 2.9	3.0 – 3.9	4.0 – 4.9	5.0 – 5.9	6.0 – 6.9
Bilangan batang tebu	25	33	46	50	44	36

Bagaimanakah membanding dan mentafsir serakan berdasarkan histogram dan poligon kekerapan?

Bentuk taburan data

Apabila menghuraikan suatu data terkumpul, adalah penting untuk kita kenal bentuk taburan. Bentuk taburan dapat dikenal pasti melalui histogram atau poligon kekerapan.

Standard Pembelajaran

Membanding dan mentafsir serakan dua atau lebih set data terkumpul berdasarkan histogram dan poligon kekerapan dan seterusnya membuat kesimpulan.

MOBILISASI MINDA 2 Berkumpulan

Tujuan: Meneroka bentuk-bentuk yang mungkin bagi taburan data.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada kumpulan.
2. Setiap kumpulan diberi lembaran kerja.
3. Dalam kumpulan, klasifikasikan bentuk-bentuk taburan tersebut kepada dua kategori, simetri atau pencong.

Perbincangan:

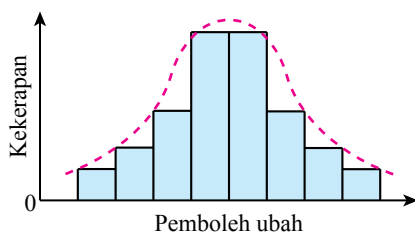
Dapatkah anda bezakan antara bentuk simetri dengan pencong?



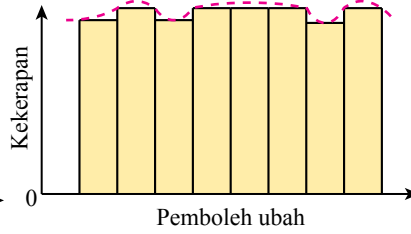
Imbas kod QR atau layari bit.do/LKBab7ii untuk mendapatkan lembaran kerja.

Hasil daripada Mobilisasi Minda 2, didapati bahawa bentuk taburan data ialah simetri, jika bentuk dan saiz taburan adalah hampir sama apabila dibahagi kepada dua bahagian kiri dan kanan. Bentuk taburan pula ialah pencong jika satu daripada hujung histogram adalah lebih panjang daripada hujungnya yang lain.

Histogram Simetri

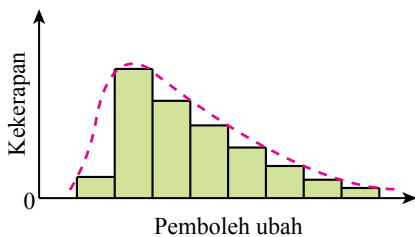


Bentuk loceng

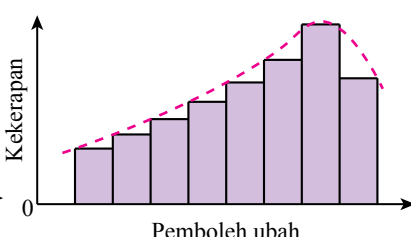


Seragam

Histogram Pencong



Pencong ke kanan

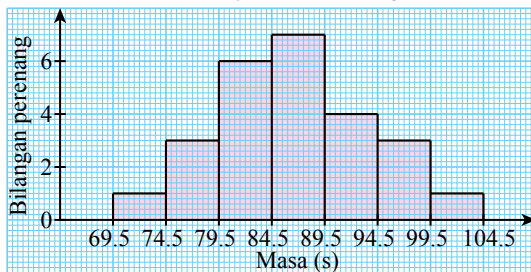


Pencong ke kiri

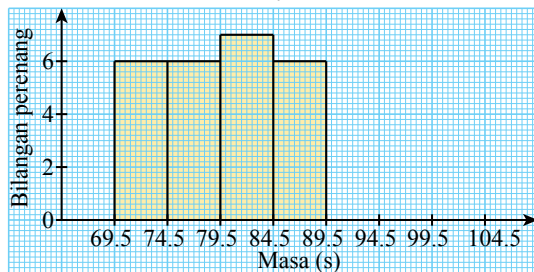
Contoh 5

Rajah di bawah menunjukkan dua histogram bagi mewakili masa yang diambil oleh 25 orang perenang dalam dua acara berbeza.

100 m Gaya Kuak Lentang



100 m Gaya Bebas

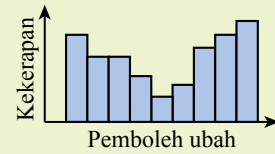


- Nyatakan bentuk taburan histogram bagi kedua-dua acara tersebut.
- Acara yang manakah mempunyai serakan masa catatan yang lebih luas? Berikan sebab anda.
- Antara gaya kuak lentang dan gaya bebas, acara yang manakah menunjukkan prestasi perenang yang lebih baik?

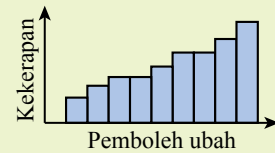
Buletin Ilmiah

Bentuk-bentuk taburan data yang lain:

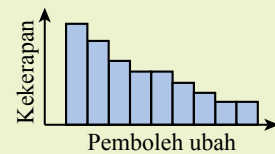
(i) Bentuk-U



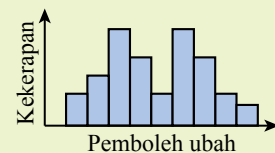
(ii) Bentuk-J



(iii) Bentuk-J songsang



(iv) Bimod



TiP Bestari

Bentuk taburan data tidak selalunya sempurna. Oleh itu, kenal pasti bentuk taburan tersebut secara keseluruhan.

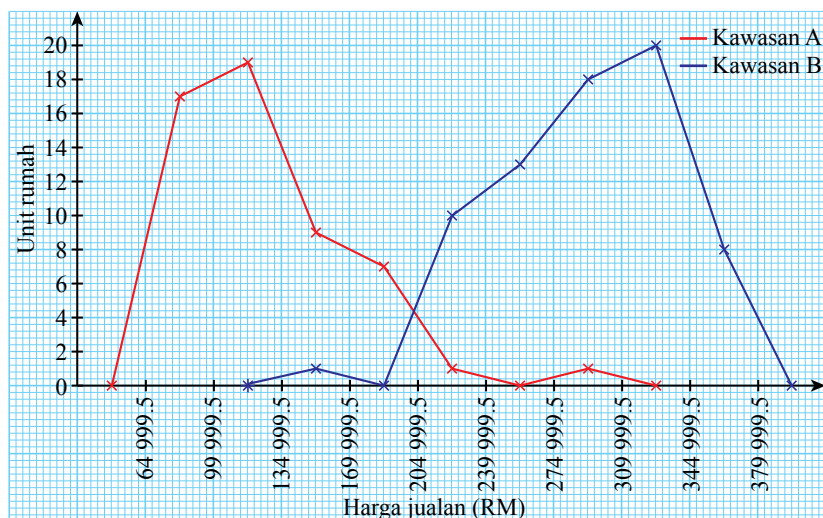
Penyelesaian:

- Bentuk taburan histogram bagi acara 100 m gaya kuak lentang ialah bentuk loceng manakala bagi acara 100 m gaya bebas ialah seragam.
- Acara 100 m gaya kuak lentang mempunyai serakan yang lebih luas kerana beza masa yang diambil adalah lebih besar, iaitu 30 saat ($102 \text{ s} - 72 \text{ s}$).
- Acara 100 m gaya bebas kerana kebanyakan catatan masa perenang adalah lebih baik.

Contoh 6

Poligon kekerapan di bawah menunjukkan harga jualan rumah yang dijual di dua buah kawasan yang berlainan bagi tempoh enam bulan yang lepas.

Jualan Rumah di Kawasan A dan Kawasan B



- Nyatakan bentuk taburan bagi kedua-dua kawasan tersebut.
- Bandingkan serakan harga jualan bagi kedua-dua kawasan tersebut.
- Pada pendapat anda, kawasan yang manakah mungkin mewakili kawasan bandar dan luar bandar?

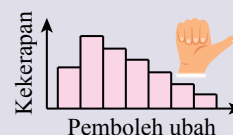
Penyelesaian:

- Bentuk taburan bagi harga jualan rumah di kawasan A ialah pencong ke kanan manakala bagi kawasan B ialah pencong ke kiri.
- Serakan harga jualan rumah di kawasan A dan di kawasan B adalah hampir sama walaupun mempunyai bentuk taburan yang berbeza.
- Kawasan A mewakili kawasan luar bandar kerana kebanyakan harga rumahnya adalah rendah manakala kawasan B mewakili kawasan bandar kerana kebanyakan harga rumahnya adalah tinggi.

TiP Bestari

Menentukan bentuk taburan menggunakan tangan:

- Pencong ke kanan

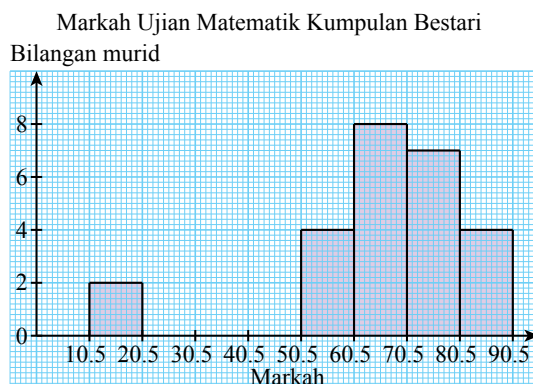
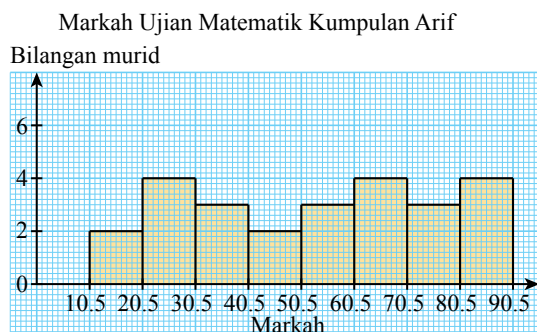


- Pencong ke kiri

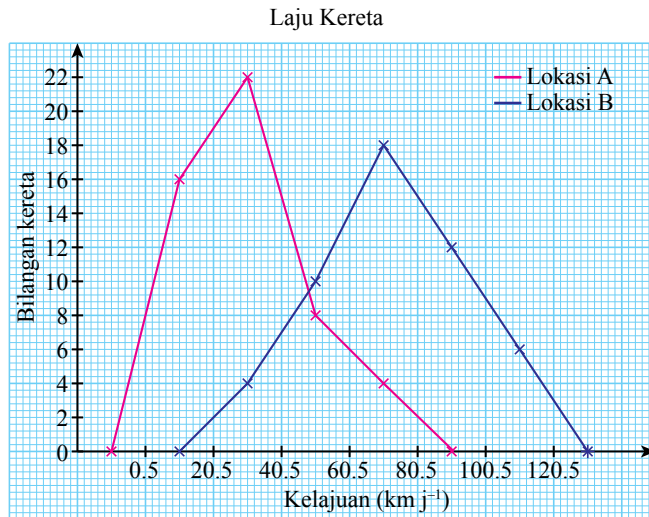


Latih Kendiri 7.1b

- Rajah di bawah menunjukkan dua histogram bagi taburan markah ujian Matematik yang diperoleh dua kumpulan, Arif dan Bestari.



- Nyatakan bentuk taburan histogram bagi kedua-dua kumpulan tersebut.
 - Bandingkan serakan markah ujian antara kedua-dua kumpulan tersebut.
 - Kumpulan manakah menunjukkan keputusan yang lebih baik? Berikan sebab anda.
- Rajah di bawah menunjukkan hasil kajian lalu lintas kereta di dua buah lokasi yang berlainan. Setiap lokasi mengambil catatan laju bagi 50 buah kereta.



- Nyatakan bentuk taburan bagi kedua-dua lokasi itu.
- Bandingkan serakan laju kereta bagi kedua-dua lokasi itu.
- Pada pendapat anda, lokasi yang manakah mungkin mewakili kawasan lebuhraya dan kawasan perumahan?

Bagaimanakah membina ogif bagi suatu set data terkumpul?

Selain daripada histogram dan poligon kekerapan, suatu taburan kekerapan juga boleh dipamerkan dengan melukis suatu lengkung kekerapan longgokan juga dikenali sebagai ogif. Apabila kekerapan longgokan suatu data diplot dan disambungkan, graf berbentuk S akan terhasil. Ogif sangat berguna dalam penentuan kuartil dan persentil. Kita akan mempelajari cara menggunakan ogif untuk tujuan berkenaan dalam bahagian selanjutnya.

Langkah-langkah membina ogif:

Tambahkan satu kelas sebelum kelas pertama dengan kekerapan sifar. Cari sempadan atas dan kekerapan longgokan setiap kelas.



Pilih skala yang sesuai bagi paksi mencancang yang mewakili kekerapan longgokan dan paksi mengufuk yang mewakili sempadan atas.



Plot kekerapan longgokan dengan sempadan atas yang sepadan.



Lukis lengkung licin yang melalui setiap titik tersebut.

Kuartil

Bagi suatu set data terkumpul dengan bilangan data N , kuartil boleh ditentukan daripada ogif. Q_1 , Q_2 dan Q_3 ialah nilai-nilai yang sepadan masing-masing dengan kekerapan longgokan $\frac{N}{4}$, $\frac{N}{2}$ dan $\frac{3N}{4}$.

Contoh 7

Jadual kekerapan di sebelah menunjukkan maklumat kandungan garam yang terdapat dalam 60 jenis makanan.

- Bina satu ogif untuk mewakili data tersebut.
- Dengan menggunakan ogif yang dibina, tentukan
 - kuartil pertama,
 - median,
 - kuartil ketiga.

Kuantiti garam (mg)	Kekerapan
100 – 149	4
150 – 199	11
200 – 249	15
250 – 299	21
300 – 349	8
350 – 399	1

Penyelesaian:

(a)

Kuantiti garam (mg)	Kekerapan	Sempadan atas	Kekerapan longgokan
50 – 99	0	99.5	0
100 – 149	4	149.5	4
150 – 199	11	199.5	15
200 – 249	15	249.5	30
250 – 299	21	299.5	51
300 – 349	8	349.5	59
350 – 399	1	399.5	60

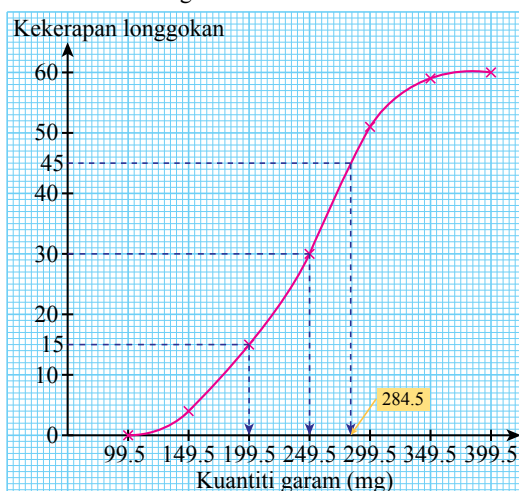
Standard Pembelajaran

Membina ogif bagi suatu set data terkumpul dan seterusnya menentukan kuartil.



- Kuartil ialah nilai yang membahagi satu set data kepada empat bahagian yang sama. Setiap set data mengandungi tiga kuartil, iaitu Q_1 , Q_2 (median) dan Q_3 .
- Kuartil pertama, Q_1 yang juga dikenali kuartil bawah ialah nilai tengah bagi separuh bahagian bawah data sebelum median atau kuartil yang mengandungi 25% data.
- Kuartil kedua, Q_2 yang juga dikenali median ialah nilai tengah bagi satu set data.
- Kuartil ketiga, Q_3 yang juga dikenali kuartil atas ialah nilai tengah bagi separuh bahagian atas data selepas median atau kuartil yang mengandungi 75% data.

Kandungan Garam dalam Makanan



Langkah-langkah menentukan kuartil:

1. Bilangan data, $N = 60$, maka $\frac{N}{4} = 15$, $\frac{N}{2} = 30$ dan $\frac{3N}{4} = 45$.
2. Lukis garis mengufuk pada kekerapan longgokan 15 sehingga bersilang dengan ogif.
3. Dari titik persilangan dalam langkah 2, lukis garis mencancang sehingga bertemu dengan paksi kuantiti garam pada paksi mengufuk.
4. Nilai kuantiti garam yang diperoleh ialah nilai Q_1 .
5. Ulangi langkah 2 hingga 4 bagi nilai 30 dan 45 untuk memperoleh nilai Q_2 dan Q_3 .

(b) $\frac{1}{4} \times 60 = 15$

Daripada graf, kuartil pertama, $Q_1 = 199.5 \text{ mg}$

15 jenis makanan mengandungi kandungan garam kurang daripada atau sama dengan 199.5 mg garam

$\frac{1}{2} \times 60 = 30$

Daripada graf, median, $Q_2 = 249.5 \text{ mg}$

30 jenis makanan mengandungi kandungan garam kurang daripada atau sama dengan 249.5 mg garam

$\frac{3}{4} \times 60 = 45$

Daripada graf, kuartil ketiga, $Q_3 = 284.5 \text{ mg}$

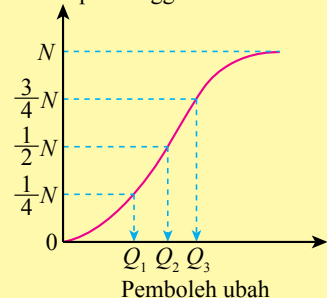
45 jenis makanan mengandungi kandungan garam kurang daripada atau sama dengan 284.5 mg garam

Buletin Ilmiah

Purata pengambilan garam dalam sehari oleh rakyat Malaysia adalah sebanyak 7.9 g (1.6 sudu teh) melebihi daripada saranan Pertubuhan Kesihatan Sedunia (WHO), iaitu kurang daripada 5 g (satu paras sudu teh) dalam sehari.

Daripada Contoh 7, kuartil pertama, median dan kuartil ketiga bagi suatu set data terkumpul boleh ditentukan dengan menggunakan ogif.

Kekerapan longgokan



Kedudukan kuartil pertama, Q_1
 $= \frac{1}{4} \times \text{jumlah kekerapan, } N$

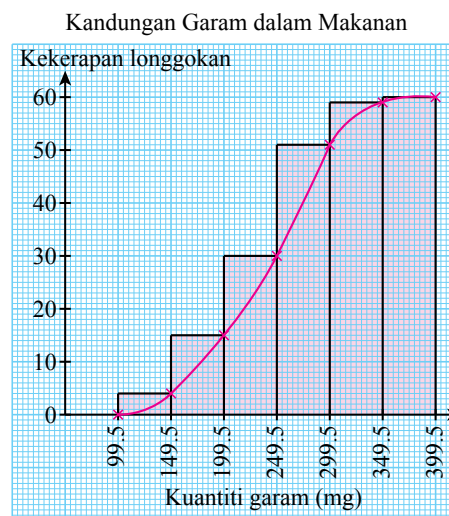
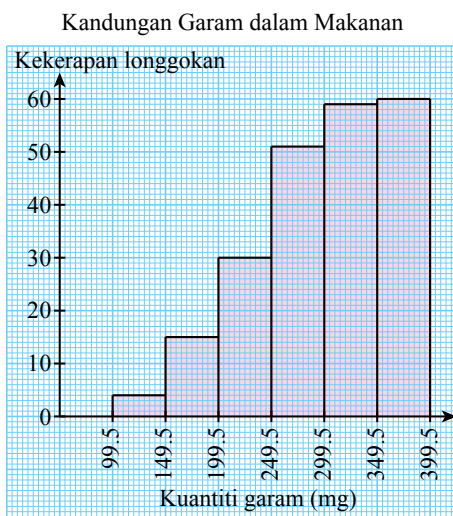
Kedudukan median, Q_2
 $= \frac{1}{2} \times \text{jumlah kekerapan, } N$

Kedudukan kuartil ketiga, Q_3
 $= \frac{3}{4} \times \text{jumlah kekerapan, } N$

Aplikasi & Kerjaya

Kerjaya sebagai pengurus kewangan mestilah mahir dengan ciri-ciri pasaran modal yang melibatkan aset kewangan seperti saham dan bon. Kaedah statistik boleh digunakan untuk menganalisis ciri-ciri pasaran modal ini melalui taburan saham dan bon.

Histogram longgokan dan ogif boleh dibina menggunakan jadual kekerapan longgokan. Histogram longgokan dibina seperti histogram yang telah anda pelajari, tetapi paksi mencancang diwakili oleh kekerapan longgokan. Merujuk kepada Contoh 7, histogram longgokan dan ogif berkait seperti yang ditunjukkan di bawah.



Bagaimanakah pembinaan ogif berkait dengan pembinaan histogram longgokan?

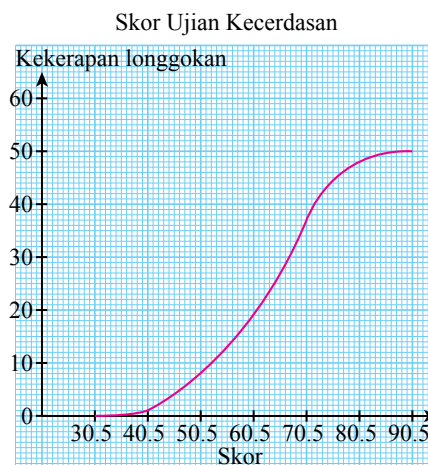
Persentil

Kita dapat menganalisis suatu data besar dengan lebih mudah dan berguna apabila kita membahagikan data tersebut kepada bahagian-bahagian lebih kecil yang dinamakan sebagai persentil. **Persentil** ialah nilai yang membahagikan satu set data kepada 100 bahagian yang sama dan diwakili dengan $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{99}$.

Contoh 8

Ogif di sebelah menunjukkan skor ujian kecerdasan yang dilakukan oleh calon yang ingin memohon jawatan di sebuah syarikat.

- Berdasarkan ogif tersebut, cari
 - persentil ke-10, P_{10}
 - persentil ke-46, P_{46}
- Hanya calon yang memperoleh persentil ke-92 dan ke atas akan dipanggil untuk temuduga. Apakah skor minimum yang perlu diperoleh seorang calon untuk layak menerima panggilan temuduga?
- Berapakah peratusan calon yang mendapat skor 57 dan ke bawah?



Penyelesaian:

$$(a) \quad (i) \quad 10\% \text{ daripada jumlah kekerapan} = \frac{10}{100} \times 50 = 5$$

Daripada ogif, $P_{10} = 46.5$

$$(ii) \quad 46\% \text{ daripada jumlah kekerapan} = \frac{46}{100} \times 50 = 23$$

Daripada ogif, $P_{46} = 63.5$

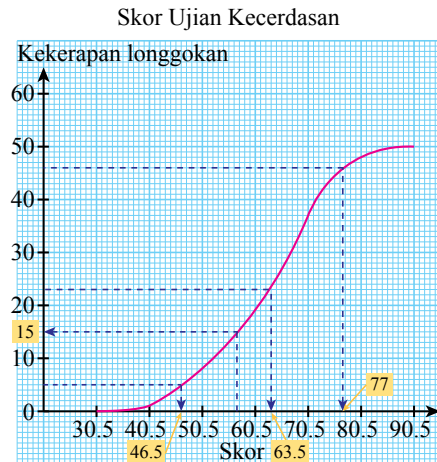
$$(b) \quad 92\% \text{ daripada jumlah kekerapan} = \frac{92}{100} \times 50 = 46$$

$P_{92} = 77$. Oleh itu, hanya calon yang memperoleh skor minimum 77 dalam ujian kecerdasan itu akan dipanggil untuk temuduga.

$$(c) \quad \text{Daripada ogif,}$$

$$\frac{15}{50} \times 100 = 30\%$$

Oleh itu, 30% daripada calon mendapat skor 57 dan ke bawah.



Buletin Ilmiah

Persentil ke-25 juga dikenali sebagai kuartil pertama, persentil ke-50 sebagai median dan persentil ke-75 sebagai kuartil ketiga.

Minda Kritis

Apakah perbezaan antara kuartil dengan persentil?

Latih Kendiri 7.1c

- Jadual kekerapan di sebelah menunjukkan markah bagi 100 orang murid dalam suatu peperiksaan.
 - Bina satu ogif untuk mewakili data tersebut.
 - Dengan menggunakan ogif yang dibina, tentukan
 - kuartil pertama
 - median
 - kuartil ketiga
- Jadual kekerapan di sebelah menunjukkan panjang tapak kaki bagi 40 orang murid.
 - Bina satu ogif untuk mewakili data tersebut.
 - Berdasarkan ogif tersebut, cari
 - persentil ke-20, P_{20}
 - persentil ke-55, P_{55}
 - persentil ke-85, P_{85}
 - Berapakah peratusan murid yang mempunyai panjang tapak kaki 24.6 cm dan ke bawah?

Markah	Bilangan murid
11 – 20	2
21 – 30	13
31 – 40	25
41 – 50	25
51 – 60	19
61 – 70	10
71 – 80	4
81 – 90	2

Panjang tapak kaki (cm)	Bilangan murid
21.0 – 21.9	1
22.0 – 22.9	4
23.0 – 23.9	10
24.0 – 24.9	18
25.0 – 25.9	5
26.0 – 26.9	2

7.2 Sukatan Serakan

Bagaimanakah menentukan julat, julat antara kuartil, varians dan sisihan piawai bagi data terkumpul?

Semasa di Tingkatan 4, anda telah mempelajari cara menentukan julat, julat antara kuartil, varians dan sisihan piawai sebagai sukatan untuk menghuraikan serakan bagi data tak terkumpul. Dalam bahagian ini, kita akan melanjutkan sukatan serakan itu bagi data terkumpul.

Standard Pembelajaran

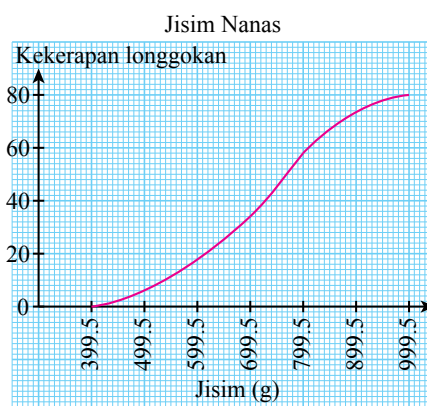
Menentukan julat, julat antara kuartil, varians dan sisihan piawai sebagai sukatan untuk menghuraikan serakan bagi data terkumpul.

Julat dan Julat antara Kuartil

Contoh 9

Pak Hamidi telah mencatatkan jisim buah nanas yang dipetik dari kebunnya. Jadual kekerapan dan ogif yang berikut menunjukkan data yang diperolehnya. Tentukan julat dan julat antara kuartil bagi data tersebut.

Jisim (g)	Bilangan nanas
400 – 499	6
500 – 599	12
600 – 699	16
700 – 799	24
800 – 899	14
900 – 999	8



KOTAK MEMORI

Julat antara kuartil
= $Q_3 - Q_1$

TiP Bestari

Julat antara kuartil bagi suatu set data terkumpul ditentukan menggunakan ogif dengan mencari kuartil pertama dan kuartil ketiga terlebih dahulu.

Penyelesaian:

Julat = titik tengah kelas tertinggi – titik tengah kelas terendah

$$= \frac{900 + 999}{2} - \frac{400 + 499}{2}$$

$$= 949.5 - 449.5$$

$$= 500 \text{ g}$$

Beza antara jisim bagi nanas yang paling berat dengan nanas yang paling ringan ialah 500 g.

Daripada ogif, kedudukan Q_1 :

$$\frac{1}{4} \times 80 = 20$$

$$Q_1 = 614.5$$

kedudukan Q_3 :

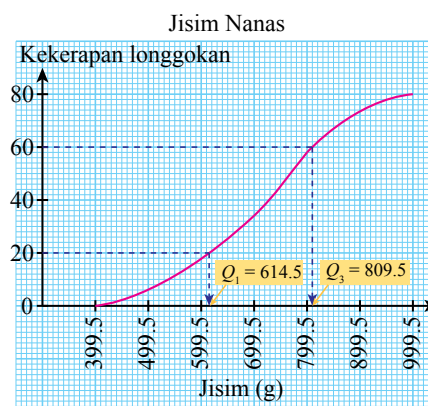
$$\frac{3}{4} \times 80 = 60$$

$$Q_3 = 809.5$$

Maka, julat antara kuartil
= $809.5 - 614.5$

$$= 195 \text{ g}$$

Beza antara jisim bagi nanas yang paling berat dengan nanas yang paling ringan yang berada pada 50% bahagian tengah taburan ialah 195 g.



Varians dan Sisihan Piawai

Varians dan sisihan piawai bagi data terkumpul boleh diperoleh menggunakan rumus berikut.

$$\begin{aligned} \text{Varians, } \sigma^2 &= \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{x}^2 \\ \text{Sisihan piawai, } \sigma &= \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{x}^2} \end{aligned}$$

dengan keadaan
 x = titik tengah bagi selang kelas
 f = kekerapan
 $\bar{x}$ = min data

KOTAK MEMORI

- Varians ialah purata kuasa dua bagi beza data dengan min.
- Sisihan piawai ialah ukuran serakan data pada min, yang diukur dengan unit yang sama dengan data asal.

Contoh 10

Jadual kekerapan di bawah menunjukkan isi padu air dalam liter terhampir, yang digunakan dalam sehari bagi sekumpulan isi rumah di sebuah kawasan perumahan. Hitung varians dan sisihan piawai bagi data itu.

Isi padu air (ℓ)	150 – 159	160 – 169	170 – 179	180 – 189	190 – 199	200 – 209
Bilangan keluarga	8	12	15	24	20	16

Penyelesaian:

Isi padu air (ℓ)	Kekerapan, f	Titik tengah, x	fx	x^2	fx^2
150 – 159	8	154.5	1 236	23 870.25	190 962
160 – 169	12	164.5	1 974	27 060.25	324 723
170 – 179	15	174.5	2 617.5	30 450.25	456 753.75
180 – 189	24	184.5	4 428	34 040.25	816 966
190 – 199	20	194.5	3 890	37 830.25	756 605
200 – 209	16	204.5	3 272	41 820.25	669 124
	$\sum f = 95$		$\sum fx = 17\,417.5$		$\sum fx^2 = 3\,215\,133.75$

$$\begin{aligned} \text{Min, } \bar{x} &= \frac{\sum fx}{\sum f} \\ &= \frac{17\,417.5}{95} \\ &= 183.34 \ell \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Varians, } \sigma^2 &= \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{x}^2 \\ &= \frac{3\,215\,133.75}{95} - \left(\frac{17\,417.5}{95}\right)^2 \\ &= 229.1856 \\ &= 229.19 \ell^2 \text{ (betul kepada 2 tempat perpuluhan)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sisihan piawai, } \sigma &= \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{x}^2} \\ &= \sqrt{229.1856} \\ &= 15.1389 \\ &= 15.14 \ell \text{ (betul kepada 2 tempat perpuluhan)} \end{aligned}$$

Semak Jawapan

1. Tekan **MODE** **MODE**
Paparasi **SD REG BASE**
Pilih 1 **1 2 3**
2. Masukkan (titik tengah), tekan **SHIFT** **,** (kekerapan) **M+**, dan ulang untuk nilai seterusnya.
3. Tekan **AC** **SHIFT** **2**
Paparasi **$\bar{x}$ σn $\sigma n-1$**
Pilih 1 untuk min: **183.3421053**
Pilih 2 untuk sisihan piawai: **15.13887696**

Latih Kendiri 7.2a

1. Jadual kekerapan di bawah menunjukkan bil elektrik bagi unit pangsapuri dalam satu bulan tertentu.

Bil elektrik (RM)	30 – 49	50 – 69	70 – 89	90 – 109	110 – 129
Bilangan unit pangsapuri	4	9	11	15	13

Lukis ogif bagi data tersebut dan seterusnya, hitung julat dan julat antara kuartil. Terangkan maksud julat dan julat antara kuartil yang diperolehi.

2. Hitung varians dan sisihan piawai bagi setiap data berikut. Berikan jawapan betul kepada dua tempat perpuluhan.

(a)

Masa (minit)	1 – 2	3 – 4	5 – 6	7 – 8	9 – 10	11 – 12
Kekerapan	15	20	28	35	30	24

(b)

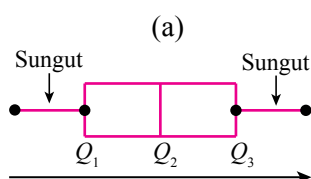
Jarak (m)	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80
Kekerapan	5	8	13	20	22	21	11

Bagaimanakah membina dan mentafsir plot kotak bagi suatu set data terkumpul?

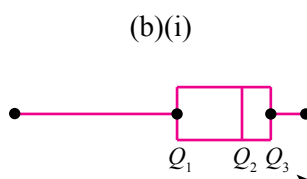
Anda telah mempelajari bahawa plot kotak ialah satu kaedah untuk memaparkan kumpulan data berangka secara grafik melalui kuartil berdasarkan lima nilai, iaitu nilai minimum, kuartil pertama, median, kuartil ketiga dan nilai maksimum. Seperti histogram dan poligon kekerapan, bentuk taburan data juga dapat dikenal pasti melalui plot kotak.

Standard Pembelajaran

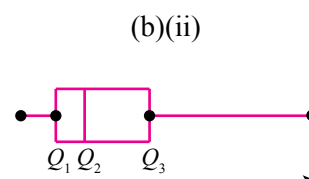
Membina dan mentafsir plot kotak bagi suatu set data terkumpul.



Taburan simetri



Taburan pencong ke kiri



Taburan pencong ke kanan

- (a) Garis median berada di tengah-tengah kotak dan sungut adalah sama panjang.
 (b) Garis median memotong kotak menjadi tidak sama saiz.
 (i) Jika bahagian kiri kotak lebih besar, maka taburan data ialah pencong ke kiri.
 (ii) Jika bahagian kanan kotak lebih besar, maka taburan data ialah pencong ke kanan.

Sungut kiri dan sungut kanan mewakili skor di luar median. Jika kotak dibahagi dengan saiz yang sama tetapi sungut kiri lebih panjang daripada sungut kanan, maka taburan pencong ke kiri atau sebaliknya.

Contoh 11

Ogif di sebelah menunjukkan jisim dalam g, bagi 90 biji belimbing yang dicatatkan.

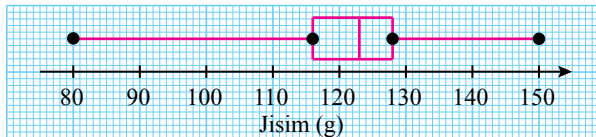
- Bina satu plot kotak berdasarkan ogif tersebut.
- Seterusnya, nyatakan bentuk taburan data tersebut.

Penyelesaian:

- Daripada ogif:

- Nilai minimum = 80
- Nilai maksimum = 150
- Kedudukan Q_1 : $\frac{1}{4} \times 90 = 22.5$
 $Q_1 = 116$
- Kedudukan Q_2 : $\frac{1}{2} \times 90 = 45$
 $Q_2 = 123$
- Kedudukan Q_3 : $\frac{3}{4} \times 90 = 67.5$
 $Q_3 = 128$

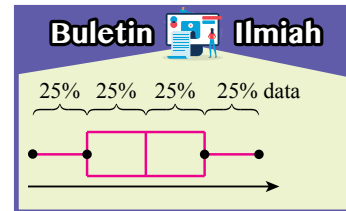
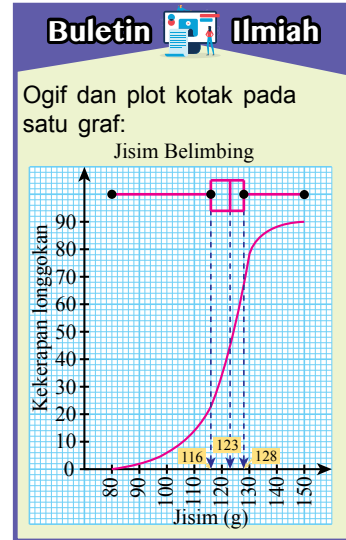
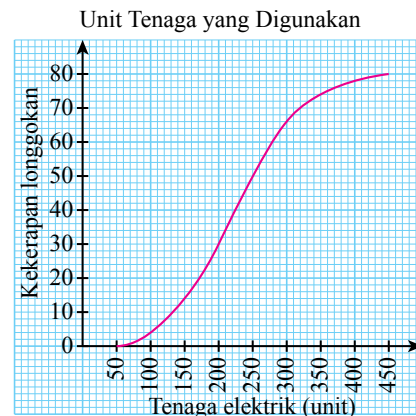
Plot kotak:



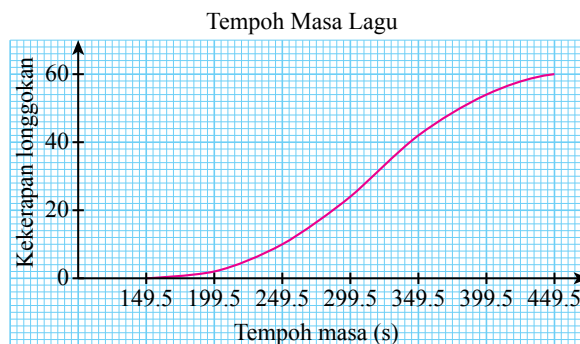
- Data ini mempunyai taburan pencong ke kiri kerana bahagian kiri plot kotak lebih besar daripada bahagian kanan plot kotak.

Latih Kendiri 7.2b

- Ogif di sebelah menunjukkan bilangan unit tenaga yang digunakan oleh 80 isi rumah dalam satu bulan tertentu.
 - Bina satu plot kotak berdasarkan ogif tersebut.
 - Seterusnya, nyatakan bentuk taburan bagi data tersebut.



2. Ogif di sebelah menunjukkan tempoh masa dalam saat, bagi 60 buah lagu yang dimainkan di radio pada suatu masa.
- Bina satu plot kotak berdasarkan ogif tersebut.
 - Seterusnya, nyatakan bentuk taburan bagi data tersebut.



Bagaimanakah membanding dan mentafsir dua atau lebih set data terkumpul berdasarkan sukatan serakan yang sesuai?

Contoh 12

Seorang ahli botani menyemai 40 sampel anak benih pokok bunga raya daripada dua hibrid yang berbeza, A dan B. Diameter bagi kedua-dua hibrid ini diukur bagi tujuan pengawasan dan pengawalan rapi supaya pokok bunga raya menghasilkan kelopak yang mekar. Jadual kekerapan di bawah menunjukkan diameter bunga bagi hibrid A dan hibrid B.

Diameter (cm)	13.0 – 13.4	13.5 – 13.9	14.0 – 14.4	14.5 – 14.9	15.0 – 15.4
Hibrid A	4	8	9	10	9
Hibrid B	9	10	8	6	7

Standard Pembelajaran

Membanding dan mentafsir dua atau lebih set data terkumpul, berdasarkan sukatan serakan yang sesuai dan seterusnya membuat kesimpulan.

Berdasarkan min dan sisihan piawai, tentukan hibrid bunga raya yang menghasilkan kelopak bunga yang lebih mekar dan konsisten. Berikan justifikasi anda.

Penyelesaian:

Bagi bunga raya hibrid A,

Diameter (cm)	Kekerapan, f	Titik tengah, x	fx	x^2	fx^2
13.0 – 13.4	4	13.2	52.8	174.24	696.96
13.5 – 13.9	8	13.7	109.6	187.69	1 501.52
14.0 – 14.4	9	14.2	127.8	201.64	1 814.76
14.5 – 14.9	10	14.7	147	216.09	2 160.9
15.0 – 15.4	9	15.2	136.8	231.04	2 079.36
	$\Sigma f = 40$		$\Sigma fx = 574$		$\Sigma fx^2 = 8\,253.5$

$$\begin{aligned}\text{Min, } \bar{x} &= \frac{574}{40} \\ &= 14.35 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Sisihan piawai, } \sigma &= \sqrt{\frac{8\,253.5}{40} - 14.35^2} \\ &= \sqrt{0.415} \\ &= 0.64 \text{ cm}\end{aligned}$$

Bagi bunga raya hibrid B,

Diameter (cm)	Kekerapan, f	Titik tengah, x	fx	x^2	fx^2
13.0 – 13.4	9	13.2	118.8	174.24	1 568.16
13.5 – 13.9	10	13.7	137	187.69	1 876.9
14.0 – 14.4	8	14.2	113.6	201.64	1 613.12
14.5 – 14.9	6	14.7	88.2	216.09	1 296.54
15.0 – 15.4	7	15.2	106.4	231.04	1 617.28
	$\Sigma f = 40$		$\Sigma fx = 564$		$\Sigma fx^2 = 7 972$

Min, $\bar{x}$

$$= \frac{564}{40}$$

$$= 14.1 \text{ cm}$$

Sisihan piawai, σ

$$= \sqrt{\frac{7 972}{40} - 14.1^2}$$

$$= \sqrt{0.49}$$

$$= 0.7 \text{ cm}$$

Hibrid A menghasilkan kelopak bunga lebih mekar kerana minnya lebih besar daripada hibrid B ($14.35 \text{ cm} > 14.1 \text{ cm}$) dan sisihan piawainya yang lebih kecil ($0.64 \text{ cm} < 0.7 \text{ cm}$) menunjukkan diameter kelopak bunga yang lebih konsisten.



Latih Kendiri 7.2c

- Sebuah kilang membuat bola perlu memantau tekanan angin bola yang dihasilkan dalam psi, sebelum diedarkan ke pasaran. Jadual kekerapan di bawah menunjukkan tekanan angin bagi 50 biji sampel bola yang diambil daripada mesin P dan mesin Q.

Tekanan angin (psi)	8.0 – 8.9	9.0 – 9.9	10.0 – 10.9	11.0 – 11.9	12.0 – 12.9	13.0 – 13.9
Mesin P	7	11	13	12	5	2
Mesin Q	1	3	5	20	18	3

Kilang itu menetapkan tekanan angin dalam sebiji bola adalah antara 11.3 psi hingga 11.7 psi. Mesin yang manakah menunjukkan prestasi yang lebih baik dari segi ketepatan tekanan angin?

- Jadual kekerapan di bawah menunjukkan jangka hayat dalam tahun, bagi bateri jenama X dan jenama Y.

Jangka hayat (tahun)	0 – 0.9	1.0 – 1.9	2.0 – 2.9	3.0 – 3.9	4.0 – 4.9
Bateri jenama X	4	10	17	20	9
Bateri jenama Y	10	21	15	8	6

Dengan menggunakan sukatan yang sesuai, tentukan jenama bateri yang lebih tahan lama dan lebih baik.

Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan sukatan serakan bagi data terkumpul?

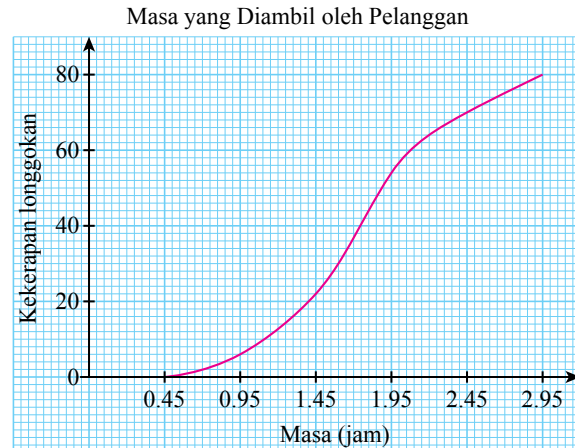
Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan sukatan serakan bagi data terkumpul.

Contoh 13

Suatu tinjauan dijalankan di sebuah pasar raya bagi mengkaji tempoh masa dalam jam, yang diambil oleh pelanggan untuk membeli barang di pasar raya itu. Hasil tinjauan tersebut ditunjukkan dalam ogif di sebelah.

- Bina jadual kekerapan bagi masa yang diambil oleh pelanggan untuk membeli barang di pasar raya itu dengan kelas $0.5 - 0.9$, $1.0 - 1.4$, $1.5 - 1.9$, $2.0 - 2.4$ dan $2.5 - 2.9$.
- Seterusnya, anggarkan min dan sisihan piawai bagi data tersebut.



Penyelesaian:

Memahami masalah

Menentukan min dan sisihan piawai daripada ogif.

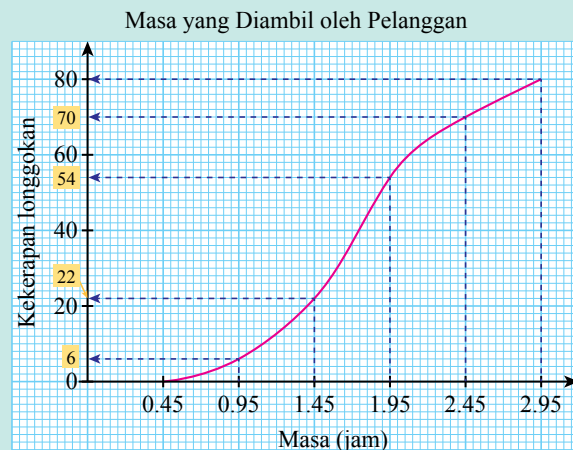
Merancang strategi

- Membina jadual kekerapan daripada ogif.
- Menghitung min dan sisihan piawai menggunakan rumus.

Melaksanakan strategi

(a)

Masa (jam)	Bilangan pelanggan	
0.5 – 0.9	6	$6 - 0 = 6$
1.0 – 1.4	16	$22 - 6 = 16$
1.5 – 1.9	32	$54 - 22 = 32$
2.0 – 2.4	16	$70 - 54 = 16$
2.5 – 2.9	10	$80 - 70 = 10$



(b)

Masa (jam)	Kekerapan, f	Titik tengah, x	fx	x^2	fx^2
0.5 – 0.9	6	0.7	4.2	0.49	2.94
1.0 – 1.4	16	1.2	19.2	1.44	23.04
1.5 – 1.9	32	1.7	54.4	2.89	92.48
2.0 – 2.4	16	2.2	35.2	4.84	77.44
2.5 – 2.9	10	2.7	27	7.29	72.9
	$\Sigma f = 80$		$\Sigma fx = 140$		$\Sigma fx^2 = 268.8$

$$\begin{aligned}\text{Min, } \bar{x} &= \frac{140}{80} \\ &= 1.75 \text{ jam}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Sisihan piawai, } \sigma &= \sqrt{\frac{268.8}{80} - 1.75^2} \\ &= \sqrt{0.2975} \\ &= 0.55 \text{ jam}\end{aligned}$$

Membuat kesimpulan

(a)

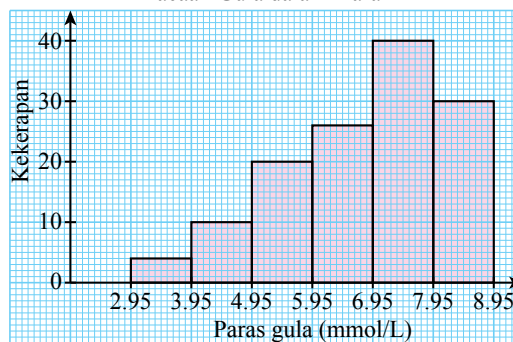
Masa (jam)	Bilangan pelanggan
0.5 – 0.9	6
1.0 – 1.4	16
1.5 – 1.9	32
2.0 – 2.4	16
2.5 – 2.9	10

(b) Min, $\bar{x} = 1.75$ jamSisihan piawai, $\sigma = 0.55$ jam**Latih Kendiri 7.2d**

1. Histogram di sebelah menunjukkan bacaan gula dalam darah yang diambil daripada sekumpulan pesakit di sebuah klinik.

- Berdasarkan histogram, adakah bentuk taburan data tersebut simetri? Berikan sebab anda.
- Hitung min dan sisihan piawai bagi bacaan gula dalam darah.
- Bandingkan sisihan piawai bagi bacaan gula dalam darah antara 6.0 mmol/L hingga 8.9 mmol/L dengan sisihan piawai di (b). Berikan justifikasi anda.

Bacaan Gula dalam Darah



2. Jadual di bawah menunjukkan hasil analisis statistik terhadap harga dalam RM, bagi 10 kg beras di pasar raya P dan pasar raya Q. Bilangan data yang diambil di kedua-dua buah pasar raya masing-masing ialah 20 kampil beras.



Pasar raya	Min	Sisihan piawai	Nilai minimum	Kuartil pertama	Median	Kuartil ketiga	Nilai maksimum
P	32	5.62	26	30	32	34	40
Q	32	4.05	26	32	34	34	40

- Nyatakan min dan julat bagi harga beras di kedua-dua pasar raya.
- Taburan harga beras di pasar raya manakah yang lebih simetri? Jelaskan jawapan anda.
- Komen tentang median dan julat antara kuartil bagi kedua-dua data.



Bagaimanakah mereka bentuk dan melaksanakan suatu projek mini yang melibatkan penyiasatan statistik?

Standard Pembelajaran

Mereka bentuk dan melaksanakan suatu projek mini yang melibatkan penyiasatan statistik berdasarkan sukatan kecenderungan memusat dan sukatan serakan serta mentafsir dan mengkomunikasikan dapatan kajian.

PROJEK

Statistik yang dikumpulkan oleh Tinjauan Kebangsaan Kesihatan dan Morbiditi (NHMS) menunjukkan bahawa semakin ramai rakyat Malaysia mengalami obesiti dengan kadar satu daripada dua orang dewasa mengalami berat badan berlebihan. Kajian lain juga mendapati berlakunya berat badan berlebihan dan obesiti dalam kalangan murid sekolah sehingga 30% daripada keseluruhan populasi. Obesiti boleh membawa masalah kesihatan seperti diabetes, penyakit jantung dan strok.

Sekolah anda akan mengadakan “Kempen Aktifkan Hidup Anda” yang bertujuan memberikan kesedaran tentang masalah obesiti dan menyemai kepentingan memupuk cara hidup sihat dalam kalangan murid. Cikgu Matematik anda bercadang untuk memaparkan tahap kesihatan murid di sekolah anda mengikut jantina secara keseluruhan pada papan buletin sekolah.

Tajuk: Tahap Kesihatan Murid

Bahan: Tali ukur, penimbang jisim badan

Langkah:

- Setiap kumpulan akan mengkaji tahap kesihatan murid menggunakan Indeks Jisim Tubuh (BMI) mengikut jantina. Bahagikan murid kepada 5 kumpulan, dengan keadaan setiap kumpulan melakukan kajian terhadap murid dari Tingkatan 1, 2, 3, 4 dan 5. Tetapkan bilangan responden yang sama mengikut jantina bagi setiap tingkatan.

TiP Bestari

Anda boleh melakukan kajian ini di luar waktu pengajaran dan pembelajaran (PdP).

2. Setiap kumpulan diminta membuat laporan projek sebagai sebahagian daripada pembelajaran dalam kelas. Laporan tersebut perlu merangkumi aspek-aspek berikut:

(a) **Soal selidik**

Bina soalan yang sesuai sebagai sebahagian daripada proses pengumpulan data seperti jantina, tinggi, jisim dan bilangan jam yang dihabiskan untuk bersukan oleh responden dalam masa seminggu.

(b) **Kaedah pengumpulan data**

Pilih satu kaedah pengumpulan untuk memperoleh data anda. Pilih responden anda secara rawak.

(c) **Kaedah mengorganisasi data**

Bina satu jadual kekerapan untuk mengorganisasikan data anda. Pilih selang kelas yang sesuai bagi setiap data tersebut.

(d) **Perwakilan secara grafik**

Wakilan data-data anda menggunakan histogram, poligon kekerapan dan perwakilan lain yang sesuai.

(e) **Analisis data**

(i) Hitung sukatan kecenderungan memusat dan sukatan serakan yang sesuai bagi setiap data anda.

(ii) Hitung Indeks Jisim Tubuh (BMI) setiap murid menggunakan rumus berikut.

$$\text{BMI} = \frac{\text{Berat (kg)}}{\text{Tinggi (m)} \times \text{Tinggi (m)}}$$

(iii) Jadual di bawah menunjukkan BMI mengikut umur bagi remaja lelaki.

Umur	Kurang berat badan	Berat badan normal	Berlebihan berat badan	Obes
13	≤ 14.8	14.9 – 20.8	20.9 – 24.8	> 24.8
14	≤ 15.4	15.5 – 21.8	21.9 – 25.9	> 25.9
15	≤ 15.9	16.0 – 22.7	22.8 – 27.0	> 27.0
16	≤ 16.4	16.5 – 23.5	23.6 – 27.9	> 27.9
17	≤ 16.8	16.9 – 24.3	24.4 – 28.6	> 28.6

Jadual di bawah menunjukkan BMI mengikut umur bagi remaja perempuan.

Umur	Kurang berat badan	Berat badan normal	Berlebihan berat badan	Obes
13	≤ 14.8	14.9 – 21.8	21.9 – 26.2	> 26.2
14	≤ 15.3	15.4 – 22.7	22.8 – 27.3	> 27.3
15	≤ 15.8	15.9 – 22.5	22.6 – 28.2	> 28.2
16	≤ 16.1	16.2 – 24.1	24.2 – 28.9	> 28.9
17	≤ 16.3	16.4 – 24.8	24.9 – 29.3	> 29.3

Sumber: Pertubuhan Kesihatan Sedunia (WHO), 2007

Berdasarkan jadual BMI dan data yang diperolehi, bina ogif untuk menentukan peratusan murid yang berada dalam kategori 'Kurang berat badan' dan 'Obes'.

TiP Bestari

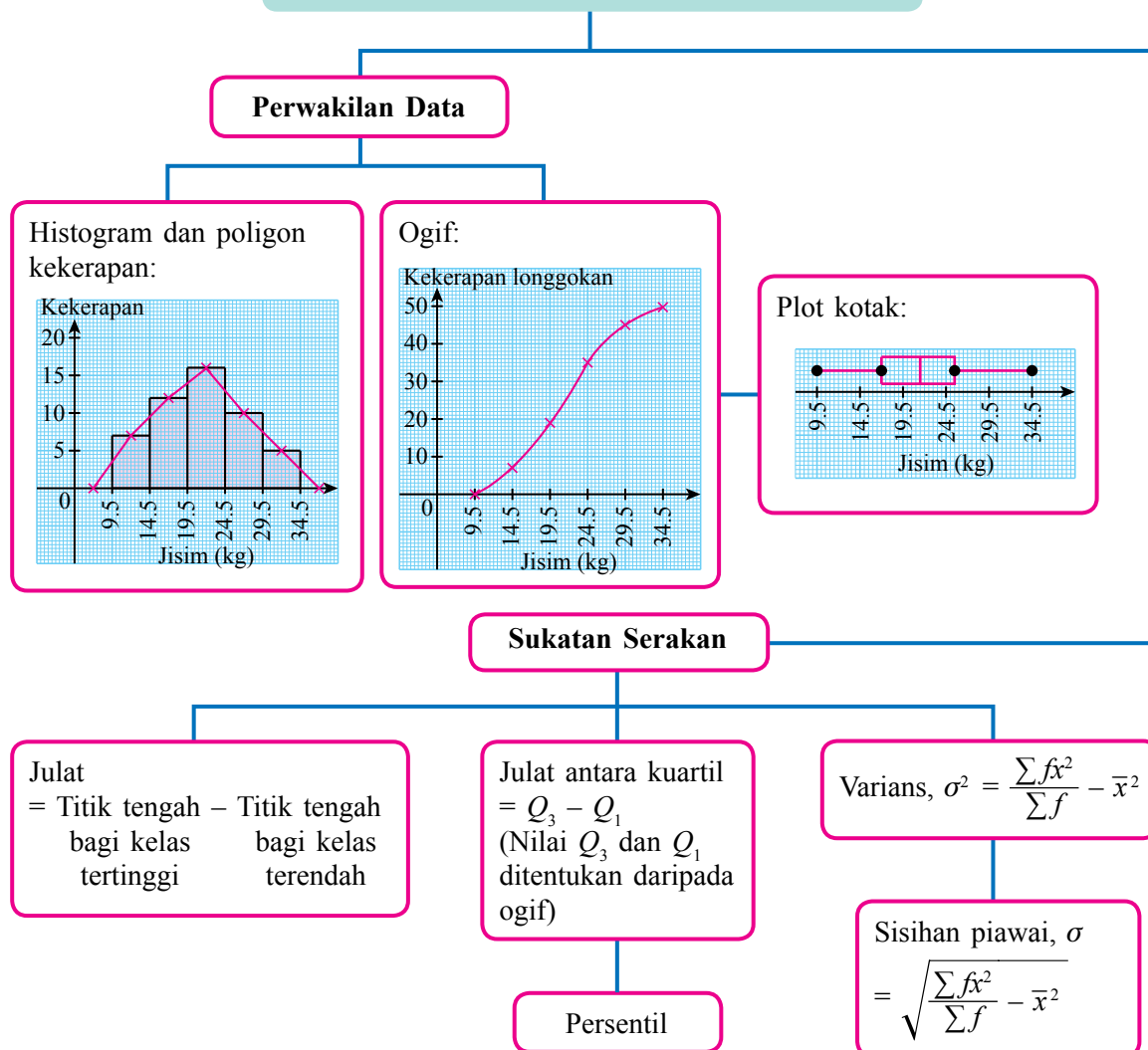
Anda boleh mengorganisasikan data dan membuat perwakilan grafik menggunakan hamparan elektronik.

(f) **Huraian dan rumusan**

- (i) Huraikan hasil dapatan kajian anda. Buat satu kesimpulan tentang tahap kesihatan murid mengikut jantina bagi setiap tingkatan.
 - (ii) Cadangkan langkah-langkah yang perlu diambil bagi murid yang mengalami masalah kurang berat badan, berlebihan berat badan dan obes.
3. Tulis hasil dapatan dan rumusan kajian anda pada kadbod dan tampal pada papan buletin di sekolah anda.

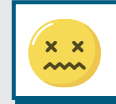
Arena Rumusan

SUKATAN SERAKAN DATA TERKUMPUL



Refleksi

Pada akhir bab ini, saya dapat



membina histogram dan poligon kekerapan bagi suatu set data terkumpul.		
membanding dan mentafsir serakan dua atau lebih set data terkumpul berdasarkan histogram dan poligon kekerapan dan seterusnya membuat kesimpulan.		
membina ogif bagi suatu set data terkumpul dan seterusnya menentukan kuartil.		
menentukan julat, julat antara kuartil, varians dan sisihan piawai sebagai sukatan untuk menghuraikan serakan bagi data terkumpul.		
membina dan mentafsir plot kotak bagi suatu set data terkumpul.		
membanding dan mentafsir dua atau lebih set data terkumpul, berdasarkan sukatan serakan yang sesuai dan seterusnya membuat kesimpulan.		
menyelesaikan masalah yang melibatkan sukatan serakan bagi data terkumpul.		
mereka bentuk dan melaksanakan suatu projek mini yang melibatkan penyiasatan statistik berdasarkan sukatan kecenderungan memusat dan sukatan serakan serta mentafsir dan mengkomunikasikan dapatan kajian.		

PROJEK MINI

Anda dikehendaki mengkaji taburan populasi penduduk di Malaysia, Indonesia dan Singapura dari tahun 1990 hingga 2019. Anda boleh mendapatkan data populasi dengan mengimbas kod QR di sebelah.

Kemudian, organisasikan data tersebut dalam jadual kekerapan dengan selang kelas yang sesuai. Bina perwakilan data yang sesuai untuk melihat taburan data tersebut.

Bagi data setiap negara, dapatkan nilai sukatan kecenderungan memusat dan sukatan serakan. Dengan menggunakan nilai sukatan yang sesuai, bandingkan populasi penduduk di ketiga-tiga buah negara dari aspek jumlah penduduk dan serakan penduduk. Buat kesimpulan bagi taburan penduduk dan kaitkan dengan kepadatan penduduk di setiap negara.



Imbas kod QR atau layari bit.do/PopulasiPenduduk untuk mendapatkan data populasi penduduk.

Latih Ekstensif

Imbas kod QR atau layari bit.do/Kuiz07 untuk kuiz interaktif



FAHAM

1. Bagi setiap selang kelas berikut, tentukan had bawah, had atas, titik tengah, sempadan bawah dan sempadan atas.

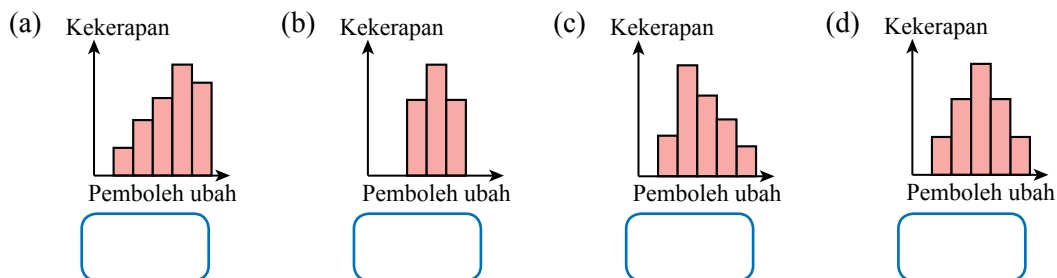
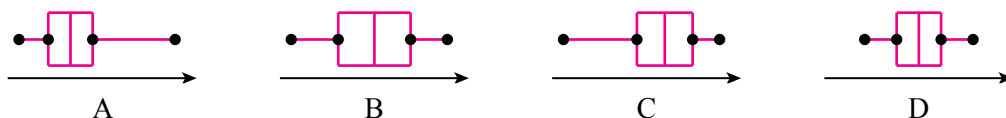
(a)	Panjang (m)	10 – 14	15 – 19	20 – 24	25 – 29	30 – 34
-----	-------------	---------	---------	---------	---------	---------

(b)	Isi padu (cm ³)	25.0 – 25.9	26.0 – 26.9	27.0 – 27.9	28.0 – 28.9	29.0 – 29.9
(c)	Jisim (g)	0 – 0.24	0.25 – 0.49	0.50 – 0.74	0.75 – 0.99	

2. Kenal pasti sama ada huraian berikut ialah histogram, poligon kekerapan atau ogif.

- (a) Graf yang mewakili kekerapan longgokan bagi kelas-kelas dalam suatu taburan kekerapan.
- (b) Memaparkan data dengan menggunakan palang yang terletak bersebelahan antara satu sama lain. Tinggi palang digunakan untuk mewakili kekerapan kelas.
- (c) Memaparkan data dengan menggunakan garis lurus yang menyambungkan titik tengah selang kelas. Kekerapan diwakili oleh ketinggian titik tengah ini.

3. Plot kotak di bawah menunjukkan beberapa bentuk taburan data. Padankan histogram berikut dengan plot kotak yang sepadan pada petak yang disediakan.



MASTERI

4. Data di sebelah menunjukkan tinggi dalam cm, bagi 30 orang murid Tingkatan 5.

- (a) Organisasikan data tersebut dengan melengkapkan jadual kekerapan di bawah. Kemudian, bina satu histogram bagi data ini menggunakan skala yang sesuai.

Tinggi (cm)	Sempadan bawah	Sempadan atas	Gundalan	Kekerapan
145 – 149				
150 – 154				

146	163	156
152	174	156
178	151	148
166	154	150
164	157	171
168	159	170
163	157	161
167	162	157
166	160	155
168	158	162

- (b) Bina satu jadual kekerapan baharu dengan menyusun semula selang kelas bermula dengan 145 – 148 cm, 149 – 152 cm, 153 – 156 cm dan seterusnya. Kemudian, bina satu histogram untuk memaparkan data ini.
- (c) Bandingkan bentuk taburan kedua-dua histogram itu. Pada pendapat anda, apakah kesimpulan yang dapat dibuat daripada perbandingan ini?

5. Jadual kekerapan di bawah menunjukkan masa yang dihabiskan menonton televisyen dalam seminggu oleh 30 buah keluarga.

Masa (jam)	2 – 4	5 – 7	8 – 10	11 – 13	14 – 16	17 – 19	20 – 22
Bilangan keluarga	8	9	6	4	2	0	1

- (a) Pada graf yang sama, bina histogram dan poligon kekerapan bagi data tersebut menggunakan skala yang sesuai.
- (b) Komen tentang bentuk taburan data yang diperoleh.

6. Jadual kekerapan di bawah menunjukkan markah ujian Matematik bagi sekumpulan murid.

Markah	40 – 49	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 99
Bilangan murid	4	8	12	10	9	7

Lukis ogif bagi data tersebut dan kemudian, hitung

- (a) julat,
- (b) julat antara kuartil,
- (c) persentil ke-40 dan persentil ke-80 bagi markah ujian tersebut.

CABAR

7. Khuzairi ialah seorang penternak lembu tenusu. Dia mengusahakan 130 ekor lembu tenusu di ladangnya. Jadual kekerapan di bawah menunjukkan isi padu dalam liter, susu yang dihasilkan oleh lembu-lembunya pada suatu minggu tertentu.

Isi padu susu (liter)	5 – 10	11 – 16	17 – 22	23 – 28	29 – 34	35 – 40
Bilangan lembu tenusu	15	28	37	26	18	6

- (a) Bina satu histogram longgokan bagi data tersebut.
- (b) Pada graf yang sama di (a), bina satu ogif. Seterusnya, anggarkan julat antara kuartil bagi taburan itu.

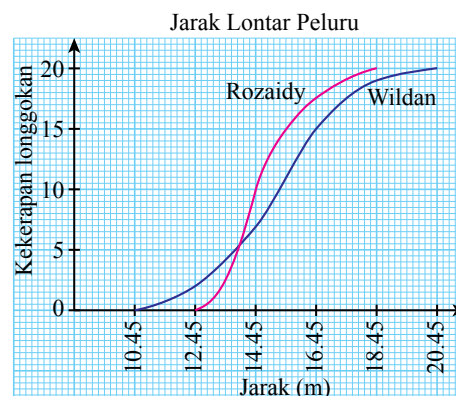
8. Jadual kekerapan di bawah menunjukkan bacaan tekanan darah yang diambil daripada sekumpulan pesakit sebelum dan selepas mencuba sejenis ubat menurunkan tekanan darah bagi satu dos pengambilan ubat itu.

Tekanan darah sistolik (mmHg)	120 – 134	135 – 149	150 – 164	165 – 179
Sebelum	4	7	8	6
Selepas	9	8	7	1

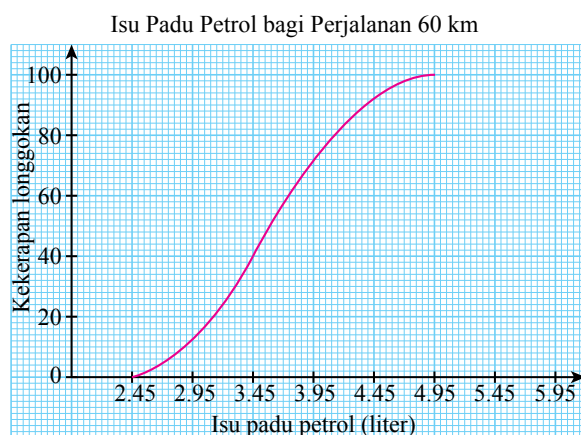
Hitung min dan sisihan piawai bagi data tersebut. Adakah ubat tersebut mampu menurunkan tekanan darah kumpulan pesakit tersebut selepas mengambil satu dos ubat itu? Berikan justifikasi anda.

9. Ogif di sebelah menunjukkan jarak peluru yang dilontarkan oleh Rozaidy dan Wildan semasa sesi latihan lontar peluru.

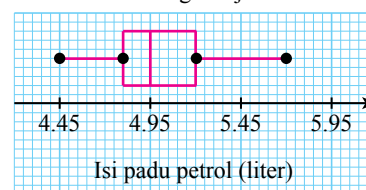
- Hitung peratusan jarak lontaran peluru melebihi 15.45 m bagi Rozaidy dan Wildan.
- Dengan menggunakan median dan kuartil ketiga, prestasi siapakah yang lebih baik semasa sesi latihan melontar peluru?



10. Isi padu petrol yang digunakan oleh 100 buah kereta dicatatkan. Ogif menunjukkan isi padu petrol yang digunakan bagi perjalanan 60 km dan plot kotak menunjukkan isi padu petrol yang digunakan untuk perjalanan 100 km.



Isi Padu Petrol bagi Perjalanan 100 km



- Lukis semula ogif bagi perjalanan 60 km. Pada graf yang sama, lukis ogif bagi isi padu petrol yang digunakan bagi perjalanan 100 km.
- Jika sebuah kereta menggunakan 3.7 liter petrol untuk perjalanan 60 km, nyatakan isi padu petrol yang digunakan bagi perjalanan 100 km. Justifikasikan jawapan anda.



TEROKAI MATEMATIK

Arahan:

- Lakukan aktiviti ini dalam kumpulan yang kecil.
- Setiap kumpulan jawab soalan dalam lembaran aktiviti (imbas kod QR).
- Selepas lembaran telah siap, setiap kumpulan perlu bina satu peta minda yang menyimpulkan bentuk taburan dan sukatan yang sesuai bagi menghurai data.
- Bentangkan hasil kumpulan anda. Hasil kumpulan yang terbaik akan dipamerkan pada sudut Matematik dalam kelas anda.



Imbas kod QR atau layari bit.do/TMBab7 untuk menjalankan aktiviti ini.

BAB 8

Pemodelan Matematik

Apakah yang akan anda pelajari?

- Pemodelan Matematik

Maslahat Bab Ini

Pemodelan matematik diaplikasikan dalam pelbagai disiplin dalam dunia sebenar. Jurutera menggunakan pemodelan matematik untuk menganalisis laluan trafik di atas sebuah jambatan. Syarikat telekomunikasi menggunakan pemodelan matematik untuk menentukan harga mengecaj pengguna bagi sesuatu perkhidmatan panggilan. Ahli sains juga menggunakan pemodelan matematik dalam meramalkan trend pertumbuhan penduduk dan sebaran penyakit berjangkit untuk menjamin kesejahteraan manusia sejagat.

Tahukah Anda?

Pandemik Covid-19 telah melanda dunia pada tahun 2019. Sehubungan dengan itu, pihak kerajaan telah melaksanakan Perintah Kawalan Pergerakan (PKP) dalam usaha melandaikan lekuk epidemiologi kes kebolehjangkitan Covid-19 di dalam negara kita. Pemodelan matematik boleh digunakan untuk membuat ramalan epidemik.



Untuk maklumat lanjut:



bit.do/TahukahAndaBab8

GERBANG ISTILAH



eksponen
fungsi eksponen
kuadratik
linear
pemodelan matematik

exponent
exponential function
quadratic
linear
mathematical modeling



Pembinaan terowong SMART (*Stormwater Management and Road Tunnel*) bertujuan untuk mengalirkan air banjir ketika berlaku hujan lebat di Bandaraya Kuala Lumpur. Walau bagaimanapun, terowong itu juga mempunyai fungsi tambahan dalam mengurangkan kesesakan trafik. Reka bentuk unik dan cara operasi terowong yang inovatif ini telah memberikan cabaran kepada jurutera pada awal pembinaannya. Tahukah anda terowong SMART diklasifikasikan kepada empat mod operasi yang berlainan melalui pemodelan matematik?

8.1 Pemodelan Matematik

Apakah itu pemodelan matematik?

Dunia kita dipenuhi dengan pelbagai soalan penting yang tidak terjawab. Misalnya,

Standard Pembelajaran

Menerangkan pemodelan matematik.



Adakah kenaikan paras laut akan memberikan kesan kepada negeri-negeri pesisiran pantai di Malaysia?



Berapakah kos perbelanjaan untuk belajar di kolej atau di universiti dalam tempoh 10 tahun yang akan datang?



Adakah jumlah penduduk di Malaysia akan melebihi 40 juta orang?



Adakah ciri-ciri mangsa jenayah siber dapat dikenal pasti dengan mengkaji tabiat seseorang itu melayari Internet?

Jawapan kepada persoalan di atas sentiasa dikaji oleh penyelidik. Adakah jawapan kepada persoalan ini dapat dicari? Mungkin. Yang pasti ialah cubaan untuk mencari penyelesaian memerlukan penggunaan matematik, barangkali melalui penciptaan, aplikasi dan perincian **model matematik**.

Satu model matematik ialah suatu hubungan matematik yang menghuraikan situasi dunia sebenar. Misalnya, rumus $I = Prt$ menunjukkan suatu hubungan antara faedah mudah dengan prinsipal, kadar faedah dan masa.

Dalam bab ini, anda akan diperkenalkan proses membina model matematik, yang dikenali sebagai **pemodelan matematik**. Dalam pemodelan matematik, masalah dunia sebenar diterjemah sebagai masalah matematik. Kemudian anda akan menyelesaikan masalah matematik berkenaan dan mentafsirkan semula penyelesaiannya dalam konteks masalah dunia sebenar.

Model matematik ialah suatu perwakilan bagi satu sistem atau senario yang digunakan untuk memperoleh kefahaman secara kualitatif dan/atau kuantitatif bagi masalah dunia sebenar serta meramalkan perlakuan masa depan.



Perhatikan masalah di bawah.

1

Di bandar *A*, terdapat 40 000 orang penduduk. Diketahui 45% daripada penduduk di bandar itu mengamalkan tabiat mengitar semula botol minuman plastik terpakai. Jika setiap orang di bandar itu menggunakan 5 botol minuman plastik setiap minggu, berapa banyak botol minuman plastik yang dikitar semula setiap minggu di bandar tersebut?

Soalan seperti ini sering ditanya dalam buku Matematik untuk mengukuhkan konsep peratusan. Hal ini adalah satu contoh soalan dalam bentuk masalah. Masalah seperti ini memberi semua maklumat yang diperlukan dan kita hanya perlu melaksanakan perhitungan supaya satu jawapan yang betul diperolehi. Masalah seperti ini digunakan untuk membantu kita memahami konsep matematik tertentu dan mengukuhkan kemahiran matematik yang penting.

Mari kita lihat pula soalan seperti berikut.

2

Berapa lamakah masa yang diperlukan untuk membersihkan tumpahan minyak di lautan?

Soalan kedua ini agak berbeza. Kita tidak mempunyai maklumat yang mencukupi untuk menjawab soalan ini. Soalan ini ialah soalan terbuka. Kita biasanya tidak mempunyai maklumat yang mencukupi apabila cuba menyelesaikan masalah dunia sebenar. Permasalahan dunia sebenar memerlukan kita menggunakan pengetahuan matematik dan kreativiti untuk menyelesaikannya. Dalam hal ini, pemodelan matematik adalah paling sesuai dalam menyelesaikan soalan terbuka seperti ini.

Terdapat beberapa komponen penting dalam pemodelan matematik:

1

Mengenal pasti dan mendefinisikan masalah

2

Membuat andaian dan mengenal pasti pemboleh ubah

3

Mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah

4

Menentukan dan mentafsir penyelesaian dalam konteks masalah berkenaan

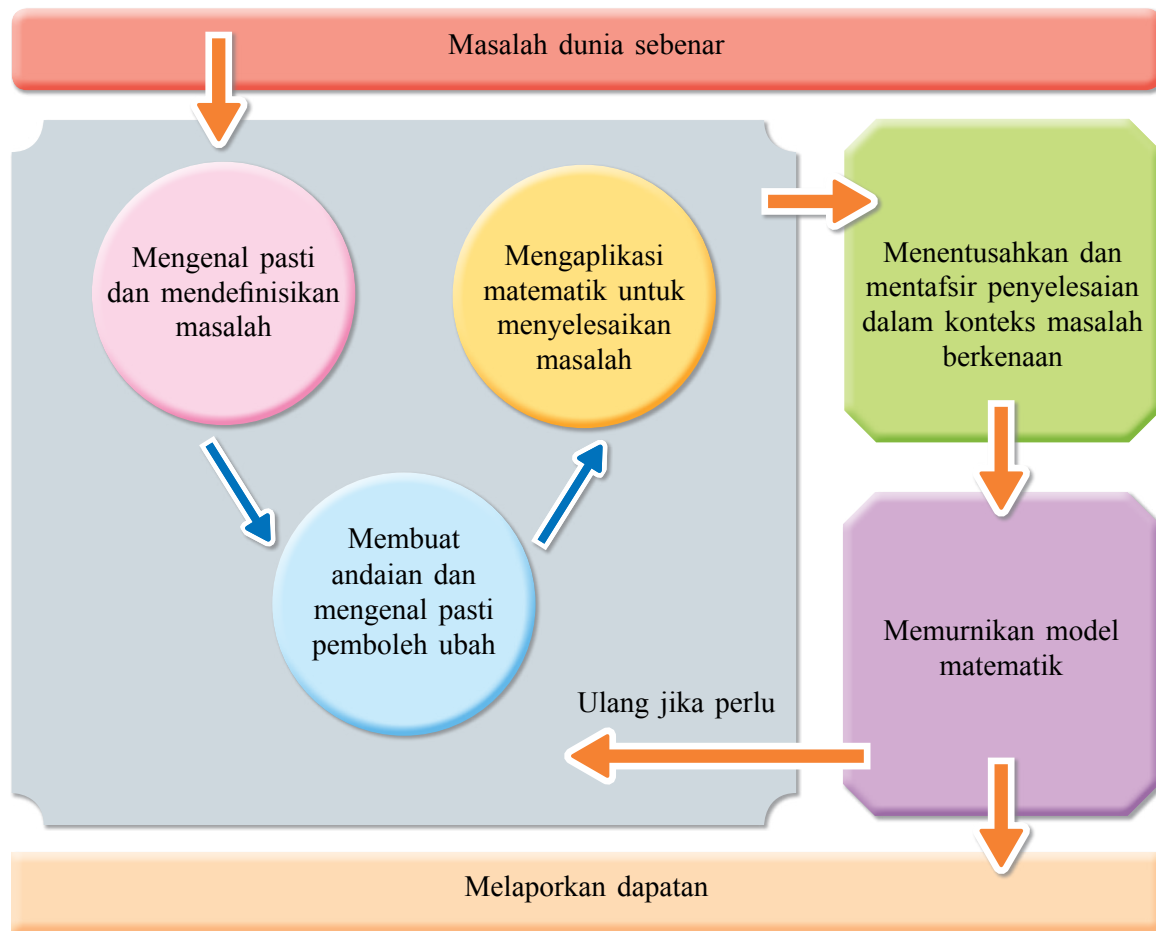
5

Memurnikan model matematik

6

Melaporkan dapatan

Proses pemodelan boleh diringkaskan seperti dalam rajah di bawah.



Mari kita lihat satu contoh pemodelan matematik yang melibatkan semua komponen di atas.

Masalah Dunia Sebenar

Pasar raya yang terletak jauh dari rumah anda mungkin menjual sekampit beras 10 kg dengan harga yang lebih rendah daripada pasar raya yang berdekatan dengan rumah anda. Adakah berbaloi jika anda memandu ke pasar raya yang terletak lebih jauh dari rumah untuk membeli dua kampak beras 10 kg yang lebih murah?

Mengenal pasti dan mendefinisikan masalah

- ❖ Harga sekampit beras 10 kg dan kos petrol.
- ❖ Tentukan kedudukan dua buah pasar raya yang jaraknya masing-masing dari rumah adalah berbeza.
- ❖ Cari maklumat yang berkaitan dari Internet, misalnya harga sekampit beras 10 kg di dua buah pasar raya berkenaan, jarak setiap pasar raya dari rumah, harga petrol semasa, kadar penggunaan petrol kereta dan sebagainya.

Membuat andaian

- Rumah, pasar raya A, pasar raya B berada pada satu garis lurus
- Memandu kereta semasa ke pasar raya
- Membeli bilangan kampil dan cap beras yang sama di pasar raya A dan pasar raya B



TiP Bestari

Andaian yang dilakukan biasanya dimulakan dengan pemboleh ubah paling mudah. Setelah masalah diselesaikan, andaian yang lebih rumit boleh dipertimbangkan.

Mengenal pasti pemboleh ubah

- Katakan
 - s , jarak di antara pasar raya A dengan pasar raya B
 - P_1 , harga sekampil beras 10 kg di pasar raya A
 - P_2 , harga sekampil beras 10 kg di pasar raya B
 - m , kadar penggunaan petrol kereta dalam km per liter
 - n , bilangan kampil beras 10 kg yang akan dibeli
 - H , harga petrol semasa dalam RM per liter
 - S , beza harga dalam RM yang dibayar bagi membeli beras 10 kg di pasar raya B berbanding dengan pasar raya A
 - T , beza kos petrol dalam RM yang dibayar bagi perjalanan ke pasar raya B berbanding dengan pasar raya A

KOTAK MEMORI

Pemboleh ubah merupakan kuantiti yang tidak diketahui nilainya.

Mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah

Harga sekampil beras 10 kg

Pasar raya A: RM25.95 per 10 kg

Pasar raya B: RM23.99 per 10 kg

Katakan bilangan kampil beras 10 kg yang akan dibeli ialah 2.

Harga yang perlu dibayar

Pasar raya A: $2 \times \text{RM}25.95 = \text{RM}51.90$

Pasar raya B: $2 \times \text{RM}23.99 = \text{RM}47.98$

Jadi, dengan membeli beras di pasar raya B, seseorang itu dapat berjimat $\text{RM}51.90 - \text{RM}47.98 = \text{RM}3.92$

Katakan jarak di antara pasar raya A dengan pasar raya B ialah 6 km, kadar penggunaan petrol sebuah kereta adalah lebih kurang 17.6 km per liter, harga petrol semasa ialah RM2.08 per liter.

Petrol yang diperlukan bagi perjalanan 6 km = $\frac{6 \text{ km}}{17.6 \text{ km/liter}} = 0.341 \text{ liter}$

Kos petrol bagi perjalanan 12 km (dua hala) = $0.341 \text{ liter} \times \frac{\text{RM}2.08}{\text{liter}} \times 2 = \text{RM}1.42$

Jadi, wang yang dapat dijimatkan ialah $\text{RM}3.92 - \text{RM}1.42 = \text{RM}2.50$ apabila membeli 2 kampil beras 10 kg di pasar raya B.

Menentusahkan dan mentafsir penyelesaian dalam konteks masalah berkenaan

Model matematik yang dapat dihasilkan adalah seperti berikut.

$$S = (P_1 - P_2) \times n$$

$$T = \frac{s}{m} \times H \times 2$$

Jika $S > T$, maka adalah lebih jimat untuk membeli beras di pasar raya B. Oleh itu, kita wajar memandu ke pasar raya B.

Jika $S \leq T$, maka kita tidak seharusnya memandu ke pasar raya B untuk membeli beras.

Contoh penggunaan model:

$$\begin{aligned} S &= (P_1 - P_2) \times n \\ &= (25.95 - 23.99) \times 2 \\ &= \text{RM}3.92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{s}{m} \times H \times 2 \\ &= \frac{6}{17.6} \times 2.08 \times 2 \\ &= \text{RM}1.42 \end{aligned}$$

Semasa menentusahkan dan mentafsir penyelesaian, kita pertimbangkan:

- Adakah penyelesaian itu menangani masalah berkenaan?
- Adakah penyelesaian itu rasional apabila diterjemahkan kembali ke dunia sebenar?

Oleh sebab $S > T$, maka adalah lebih jimat untuk membeli beras di pasar raya B, maka kita wajar memandu ke pasar raya B. Oleh itu, model matematik tersebut dapat menangani masalah berkenaan.

Daripada model matematik yang dibina, penerokaan lanjutan boleh dibuat.

1. Jika semua pemboleh ubah dikekalkan, sejauh manakah jarak kedudukan pasar raya B adalah optimum?

$$\begin{aligned} (P_1 - P_2) \times n &> \frac{s}{m} \times H \times 2 \\ (25.95 - 23.99) \times 2 &> \frac{s}{17.6} \times 2.08 \times 2 \\ s &< 16.6 \text{ km} \end{aligned}$$

Hal ini bermakna jika jarak di antara dua pasar raya itu adalah kurang dari 16.6 km, maka adalah **wajar memandu ke pasar raya B** untuk membeli beras.

Buletin Ilmiah

Optimum bermaksud kedudukan yang terbaik atau paling menguntungkan.

2. Berapakah harga sekampit beras 10 kg yang maksimum di pasar raya B sehingga mempengaruhi seseorang memandu ke pasar raya B untuk membeli beras?

$$\begin{aligned} (P_1 - P_2) \times n &> \frac{s}{m} \times H \times 2 \\ (25.95 - P_2) \times 2 &> \frac{6}{17.6} \times 2.08 \times 2 \\ P_2 &< \text{RM}25.24 \end{aligned}$$

Hal ini bermakna selagi harga sekampit beras 10 kg di pasar raya B adalah kurang daripada RM25.24, perjalanan yang diambil adalah berbaloi.

Jadi, melalui model matematik di atas, kita bukan sahaja dapat menjawab sama ada tindakan yang diambil adalah terbaik untuk situasi yang diberi malah membolehkan kita menentukan faktor-faktor lain yang menyokong atau menyangkal keputusan untuk memandu pada jarak yang lebih jauh untuk membeli beras.

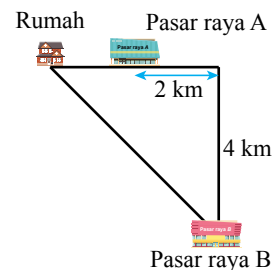
Kemudian, refleksi tentang model dan persoalan yang boleh ditimbulkan adalah seperti berikut.



Refleksi seperti ini membolehkan kita memikirkan keperluan memurnikan suatu model matematik.

Memurnikan model matematik

Andaian yang dibuat tentang lokasi rumah, pasar raya A dan pasar raya B yang berada pada suatu garis lurus perlu dikaji semula. Jika lokasi ketiga-tiga tempat ini tidak terletak di atas suatu garis lurus, bagaimana hal ini memberi impak kepada model kita? Jika andaian baharu dibuat, maka model perlu diubah untuk menggambarkan perubahan ini.



Melaporkan dapatan

Gunakan simbol dan rajah semasa melaporkan dapatan jika perlu. Simbol dan rajah yang digunakan akan menggambarkan keseluruhan proses pemodelan sehingga mencapai dapatan yang dikehendaki. Setiap model mempunyai kekuatan dan kelemahannya, yang penting model itu dapat mengenali kekuatan dan kelemahan itu dalam laporannya.

Misalnya,

- ❖ nilai bagi masa yang diperuntukkan oleh seseorang adalah sesuatu yang tidak dipertimbangkan dalam model ini. Adakah memandu tambahan 12 km untuk jumlah penjimatan sebanyak RM2.50 berbaloi bagi seseorang? Mengikut model ini, penjimatan 5 sen dianggap berbaloi.
- ❖ impak kepada alam sekitar tidak dipertimbangkan dalam model ini. Adakah dengan memandu tambahan jarak 12 km untuk penjimatan sebanyak RM2.50 itu mesra alam sekitar? Model ini tidak mempertimbangkan usaha ke arah kelestarian alam sekitar seperti usaha mengurangkan pengeluaran karbon dioksida.

Kita telah melihat cara proses pemodelan matematik dilakukan dengan menggunakan satu contoh di atas. Perlu ditegaskan bahawa kita tidak boleh menggunakan contoh ini sebagai satu templat penyelesaian kepada masalah yang lain. Dalam menyelesaikan masalah melalui pemodelan matematik, setiap individu atau kumpulan mempunyai idea, kemahiran dan persepsi yang berbeza. Soalan terbuka seperti ini berkemungkinan menjana model matematik yang berbeza sama sekali tetapi masih sah dengan menghasilkan jawapan yang berlainan.

Contoh 1

Jeremy menyimpan RM4 000 di Bank Bunga Raya dengan kadar faedah mudah 1.5% setahun. Jeremy ingin membeli seunit komputer berharga RM4 455 melalui hasil simpanannya. Berapa lamakah tempoh penyimpanan yang diperlukan oleh Jeremy?

- Kenal pasti dan definisikan masalah dalam persoalan di atas.
- Tentukan andaian yang perlu dibuat dan kenal pasti pemboleh ubah dalam menyelesaikan masalah di atas.

Penyelesaian:

- Dalam masalah ini, kita mengetahui prinsipal dan kadar faedah. Faedah ialah amaun yang Jeremy perlukan selain RM4 000 untuk membeli komputer. Kita perlu mencari tempoh simpanan Jeremy di bank.

(b) Andaian:

- Kita perlu mengandaikan kadar faedah tidak berubah sepanjang tempoh kita melakukan perhitungan faedah. Jika tidak, rumus $I = Prt$ menjadi tidak sah.
- Kita juga perlu mengandaikan harga komputer tidak berubah apabila Jeremy berjaya mengumpulkan amaun wang yang diperlukan.

Pemboleh ubah:

Pemboleh ubah yang terlibat ialah I untuk faedah, P untuk prinsipal, r untuk kadar faedah dan t untuk masa dalam tahun.

KOTAK MEMORI

Faedah mudah ialah ganjaran yang diberikan kepada penyimpan mengikut suatu kadar tertentu atas jumlah wang simpanannya untuk suatu tempoh masa yang tertentu. Faedah mudah boleh dihitung dengan menggunakan rumus $I = Prt$ dengan keadaan I ialah faedah, P ialah prinsipal, r ialah kadar faedah dan t ialah masa dalam tahun.

Latih Kendiri 8.1a

- Perjalanan sebuah bot ke arah hulu sungai yang meliputi dua tempat yang terletak di tebing sungai mengambil masa 6 jam. Perjalanan balik bot ke hilir sungai mengambil masa 5 jam. Jika kelajuan arus sungai ialah 2 km j^{-1} , berapakah kelajuan bot di atas air tenang?
 - Kenal pasti dan definisikan masalah dalam persoalan di atas.
 - Tentukan andaian yang perlu dibuat dan kenal pasti pemboleh ubah dalam menyelesaikan masalah di atas.
- Secara berkumpulan, baca soalan di bawah dan layari Internet untuk mendapatkan maklumat.

Anda baru sahaja menamatkan pengajian ijazah dalam bidang pemasaran dan ditawarkan kerja sebagai eksekutif pemasaran oleh dua buah syarikat berbeza. Syarikat A yang terletak di kampung halaman anda menawarkan gaji permulaan yang lebih rendah dan kenaikan gaji tahunan yang lebih rendah daripada syarikat B yang terletak di ibu kota. Pilihan yang manakah lebih berbaloi?

Terangkan cara anda menggunakan proses pemodelan matematik untuk menyelesaikan masalah di atas.

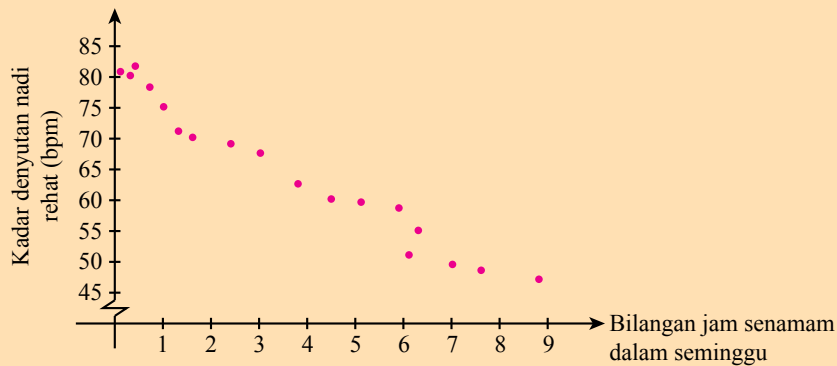
Bagaimanakah menyelesaikan masalah kehidupan sebenar melalui pemodelan matematik?

MOBILISASI MINDA 1 Berpasangan

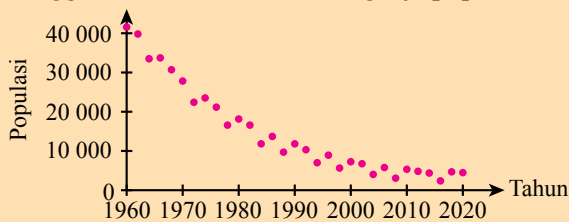
Tujuan: Mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah.

Langkah:

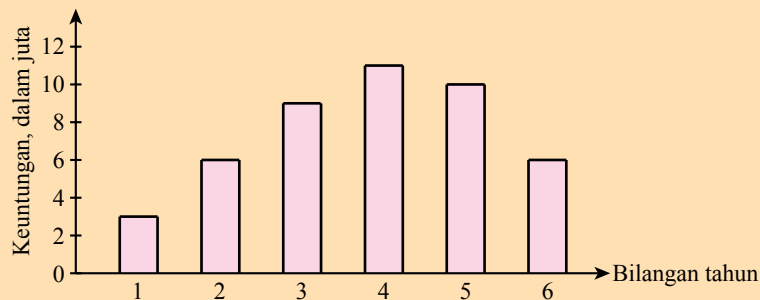
1. Berdasarkan maklumat dan rajah yang diberi, tentukan jenis fungsi (linear, kuadratik atau eksponen) yang mungkin boleh digunakan sebagai model bagi data.
2. Bincangkan pemilihan anda.
 - (a) Seorang doktor menggunakan data untuk mengkaji kadar denyutan nadi rehat orang dewasa yang normal mengikut bilangan jam senaman dalam seminggu.



- (b) Seorang saintis menggunakan data untuk mengkaji populasi harimau.



- (c) Seorang pengurus pemasaran mengkaji data yang menunjukkan hubungan antara keuntungan dengan bilangan tahun suatu produk berada di pasaran.



Hasil daripada Mobilisasi Minda 1, didapati bahawa kita dapat menentukan jenis fungsi yang mungkin boleh digunakan sebagai model bagi data dengan **mengkaji pola graf**.

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah kehidupan sebenar melalui pemodelan matematik yang melibatkan fungsi:

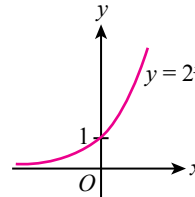
- (i) Linear
- (ii) Kuadratik
- (iii) Eksponen

dan mengkomunikasikan proses pemodelan matematik yang dilaksanakan.

Fungsi linear: Graf menyerupai satu garis lurus.

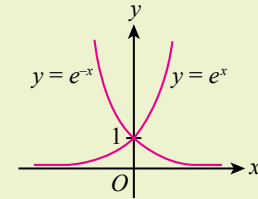
Fungsi kuadratik: Graf lengkung berbentuk parabola. Lengkung mungkin naik dan kemudian turun atau turun dan kemudian naik.

Fungsi eksponen: Graf lengkung yang mengilustrasikan kenaikan atau penurunan nilai data pada kadar yang mendadak. Fungsi eksponen ialah suatu fungsi yang dapat diuraikan oleh persamaan yang mempunyai bentuk $y = Ca^x$, dengan keadaan a ialah nombor nyata positif, $a \neq 1$ dan C ialah nilai awal. Misalnya, jika $C = 1$ dan $a = 2$, graf $y = 2^x$ adalah seperti rajah di sebelah.



Buletin Ilmiah

Rajah di bawah menunjukkan dua graf fungsi eksponen dengan asas e dengan keadaan $e = 2.7182818284$



Contoh 2

Kereta Amin menggunakan 45 liter petrol untuk bergerak sejauh 405 km. Jika Amin ingin memandu kereta yang sama untuk suatu perjalanan sejauh 198 km, berapakah jumlah petrol dalam liter yang diperlukan? Selesaikan masalah ini melalui pemodelan matematik.

Penyelesaian:

Mengenal pasti dan mendefinisikan masalah

- Tentukan isi padu petrol yang diperlukan untuk suatu perjalanan sejauh 198 km.
- Diketahui bahawa lebih jauh perjalanan, lebih banyak jumlah petrol diperlukan. Oleh itu, jumlah petrol berubah secara langsung dengan jarak perjalanan.

Membuat andaian dan mengenal pasti pemboleh ubah

- Andaikan kelajuan memandu bagi kedua-dua perjalanan sejauh 405 km dan 198 km adalah sama
- Katakan x mewakili jarak perjalanan dan y mewakili jumlah petrol yang diperlukan
- y berubah secara langsung dengan x , maka $y = kx$ dengan keadaan k ialah pemalar

Mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah

Gantikan $y = 45$ dan $x = 405$ ke dalam $y = kx$,

$$45 = k(405)$$

$$k = \frac{45}{405} = \frac{1}{9}$$

$$\text{Maka, } y = \frac{1}{9}x$$

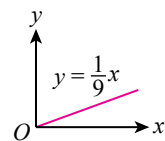
Persamaan ini menghuraikan hubungan antara jumlah petrol yang diperlukan dengan jarak perjalanan.

$$\begin{aligned}\text{Apabila } x &= 198, y = \frac{1}{9}(198) \\ &= 22 \text{ liter}\end{aligned}$$

Maka, 22 liter petrol diperlukan untuk suatu perjalanan sejauh 198 km.

Menentusahkan dan mentafsir penyelesaian dalam konteks masalah berkenaan

Model fungsi linear $y = \frac{1}{9}x$ yang diperoleh mungkin tidak dapat digunakan untuk semua situasi perjalanan. Misalnya, jika perjalanan sejauh 405 km melalui jalan raya yang menghubungkan pekan dan bandar manakala perjalanan sejauh 198 km menerusi lebuh raya. Oleh itu, kadar penggunaan petrol adalah lebih cepat dalam perjalanan pertama berbanding dengan yang kedua. Apabila diterjemah kembali ke dunia sebenar, model fungsi linear yang diperoleh tidak sesuai digunakan untuk menangani masalah berkenaan.



Memurnikan model matematik

Dalam masalah ini, kita tidak dapat memurnikan model memandangkan maklumat yang diberi adalah terhad.

Melaporkan dapatan

Laporkan dapatan dalam bentuk penyelesaian masalah berdasarkan tafsiran penyelesaian yang telah dilaksanakan di atas.

Contoh 3

Rajah di bawah menunjukkan keratan rentas sebatang sungai. Seorang ahli hidrologi mengukur kedalaman sungai, y m, pada jarak yang berbeza, x m dari tebing sungai. Keputusannya yang diperoleh diberi dalam jadual berikut.



Jarak dari tebing sungai, x m	Kedalaman sungai, y m
0	0
4	1.5
8	2.3
12	2.9
18	2.9
25	1.7
30	0

Dengan menggunakan pemodelan matematik, tunjukkan cara ahli hidrologi itu menggunakan data di atas untuk menentukan kedalaman sungai itu.

Penyelesaian:

Mengenal pasti dan mendefinisikan masalah

Bagaimana menentukan kedalaman sebatang sungai?

Membuat andaian dan mengenal pasti pemboleh ubah

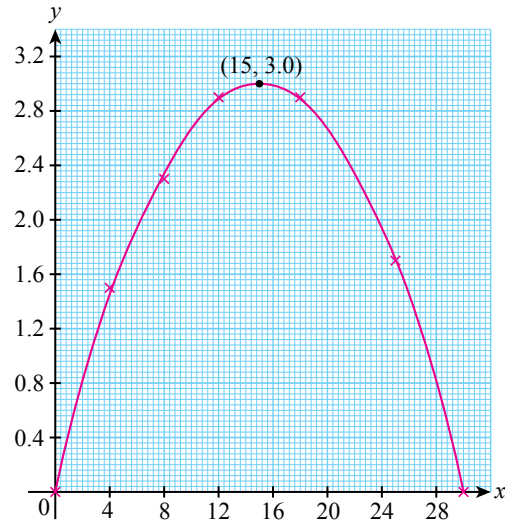
- Andaikan sungai adalah paling dalam di bahagian tengah dan kedalamannya berkurangan sehingga 0 di bahagian tepi sungai.
- Dua pemboleh ubah yang terlibat dalam kajian ini ialah kedalaman sungai, y m, dan jarak dari tebing sungai, x m.



Ahli hidrologi ialah ahli sains yang mengkaji tentang pergerakan, taburan dan kualiti air dalam alam semula jadi.

Mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah

- Tulis jarak dari tebing sungai dan kedalaman sungai sebagai set pasangan tertib (x, y) dan lukis satu graf bagi data tersebut.
- Data kelihatan menaik dan kemudian menurun dan ini menyerupai suatu fungsi kuadratik.
- Graf yang dilukis menunjukkan lengkung penyuaian terbaik dan **menyerupai graf fungsi kuadratik**.
- Dalam pemodelan matematik untuk mewakili situasi sebenar, nilai anggaran digunakan.
- Berdasarkan graf, didapati kedalaman sungai ialah 3 m. Hal ini berlaku ketika jarak dari tebing sungai ialah 15 m (anggaran).



Menentukan dan mentafsir penyelesaian dalam konteks masalah berkenaan

Tentukan fungsi kuadratik berkenaan yang mempunyai bentuk $y = ax^2 + bx + c$. Tentukan pemalar a , b dan c dengan menggantikan sebarang tiga data, misalnya $(0, 0)$, $(25, 1.7)$ dan $(30, 0)$ ke dalam persamaan.

$$\begin{aligned} 0 &= a(0)^2 + b(0) + c \\ 1.7 &= a(25)^2 + b(25) + c \\ 0 &= a(30)^2 + b(30) + c \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 0 &= c \\ 1.7 &= 625a + 25b + c \\ 0 &= 900a + 30b + c \end{aligned}$$

Oleh sebab $c = 0$, sistem bagi dua persamaan linear dalam dua pemboleh ubah ialah:

$$\begin{aligned} 1.7 &= 625a + 25b \quad \text{..... ①} \\ 0 &= 900a + 30b \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

Daripada ②, $b = -30a$ ③

$$\begin{aligned} \text{Gantikan ③ ke dalam ①, } 1.7 &= 625a + 25(-30a) \\ 1.7 &= -125a \\ a &= -0.0136 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Gantikan } a = -0.0136 \text{ ke dalam ③, } b &= -30(-0.0136) \\ &= 0.408 \end{aligned}$$

Maka fungsi kuadratik yang mungkin ialah $y = -0.0136x^2 + 0.408x$

$$\begin{aligned} \text{Gantikan } x = 15, y &= -0.0136(15)^2 + 0.408(15) \\ &= 3.06 \text{ (hampir dengan jawapan yang diperoleh daripada graf)} \end{aligned}$$

Buletin Ilmiah

Sistem persamaan linear bermaksud, terdapat dua atau lebih persamaan linear yang melibatkan set pemboleh ubah yang sama.

Memurnikan model matematik

- Model ini, kita andaikan kedalaman sungai adalah paling dalam di bahagian tengah. Hal ini mungkin tidak benar bagi sesetengah sungai lain. Model baharu diperlukan untuk andaian baharu.
- Kejituan jawapan akan bertambah jika lebih banyak data diambil.

Melaporkan dapatan

Laporan penuh dibuat berdasarkan struktur rangka kerja pemodelan di atas.

Contoh 4

Faedah kompaun ialah faedah yang dihitung berdasarkan prinsipal asal dan juga faedah yang terkumpul daripada tempoh penyimpanan sebelumnya. Pada awal suatu tahun, Encik Gomez menyimpan RM20 000 dalam akaun simpanan yang memberikan faedah 4% setahun dan dikompaun setiap setahun. Terbitkan satu model matematik bagi jumlah simpanan Encik Gomez selepas t tahun penyimpanan. Selesaikan masalah ini melalui pemodelan matematik.

Penyelesaian:**Mengenal pasti dan mendefinisikan masalah**

- Encik Gomez diberikan faedah kompaun dengan pengkompaunan sekali setahun.
- Prinsipal Encik Gomez ialah RM20 000.
- Kadar faedah tahunan ialah 4%.
- Terbitkan satu model matematik bagi jumlah simpanan Encik Gomez pada akhir tahun ke- t .

Membuat andaian dan mengenal pasti pemboleh ubah

- Andaikan Encik Gomez tidak mengeluarkan atau menambah wang simpanannya sepanjang tempoh penyimpanannya.
- Pemboleh ubah yang terlibat ialah prinsipal, RMP, kadar faedah tahunan, r , bilangan kali faedah dikompaun, n , dan masa, t tahun.

Mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah

Harus diingat dalam pengiraan faedah kompaun, setiap tahun kita akan mempunyai 100% prinsipal, ditambah dengan 4% baki sebelumnya. Kita membina jadual seperti berikut.

Tahun	Prinsipal (RM)	Faedah yang diterima (RM)	Prinsipal + Faedah (RM)	Hasil simpanan (RM)
1	20 000	$20\,000 \times 0.04$	$20\,000 + 20\,000 \times 0.04$ $= 20\,000(1 + 0.04)$	$20\,000(1.04)$
2	$20\,000(1.04)$	$20\,000(1.04) \times 0.04$	$20\,000(1.04) + 20\,000(1.04) \times 0.04$ $= 20\,000(1.04)(1 + 0.04)$	$20\,000(1.04)^2$
3	$20\,000(1.04)^2$	$20\,000(1.04)^2 \times 0.04$	$20\,000(1.04)^2 + 20\,000(1.04)^2 \times 0.04$ $= 20\,000(1.04)^2(1 + 0.04)$	$20\,000(1.04)^3$
4	$20\,000(1.04)^3$	$20\,000(1.04)^3 \times 0.04$	$20\,000(1.04)^3 + 20\,000(1.04)^3 \times 0.04$ $= 20\,000(1.04)^3(1 + 0.04)$	$20\,000(1.04)^4$
5	$20\,000(1.04)^4$	$20\,000(1.04)^4 \times 0.04$	$20\,000(1.04)^4 + 20\,000(1.04)^4 \times 0.04$ $= 20\,000(1.04)^4(1 + 0.04)$	$20\,000(1.04)^5$

Menentusahkan dan mentafsir penyelesaian dalam konteks masalah berkenaan

Berdasarkan jadual di atas, didapati bahawa pada penghujung setiap tahun, hasil simpanan ialah suatu kuasa 1.04 didarab dengan prinsipal simpanan sebanyak RM20 000, dan kuasa itu sepadan dengan bilangan tahun simpanan.

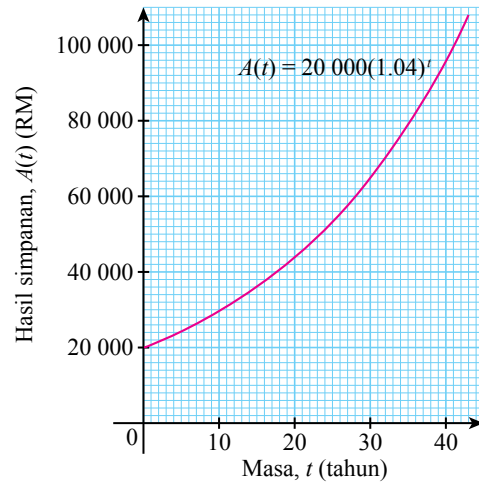
Pola tersebut dapat digeneralisasikan kepada satu model matematik dengan menggunakan P untuk mewakili prinsipal, t untuk mewakili bilangan tahun dan r untuk mewakili kadar faedah tahunan. Maka, model matematik ialah

$$A(t) = P(1 + r)^t, \quad \leftarrow \text{Perhatikan bahawa } 1.04 = 1 + 0.04 = 1 + r$$

dengan keadaan $A(t)$ ialah jumlah simpanan pada tahun ke- t .

Model matematik ini merupakan suatu fungsi eksponen yang membolehkan kita menghitung hasil simpanan jika faedah dikompaunkan setahun sekali untuk t tahun.

Graf di sebelah menunjukkan graf fungsi eksponen $A(t) = 20\,000(1.04)^t$. Graf hasil simpanan selepas t tahun, $A(t)$, menunjukkan suatu pertumbuhan eksponen apabila masa, t , bertambah.



Memurnikan model matematik

Model matematik $A(t) = P(1 + r)^t$ merupakan pengiraan untuk faedah kompaun dengan kekerapan pengkompaunan sekali setahun. Dalam situasi sebenar, faedah kompaun boleh dikompaunkan dengan lebih kerap, misalnya setengah tahun sekali atau 3 bulan sekali dan sebagainya.

Jika faedah dikompaunkan sebulan sekali, kadar faedah r dibahagikan antara 12 bulan kerana $\frac{1}{12}$ daripada kadar digunakan setiap bulan. Pemboleh ubah t didarab dengan 12 kerana faedah dihitung 12 kali dalam setahun. Maka, model matematik akan berubah menjadi $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$. Secara umumnya, jika faedah dikompaunkan n kali setahun, model matematik ialah $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

Melaporkan dapatan

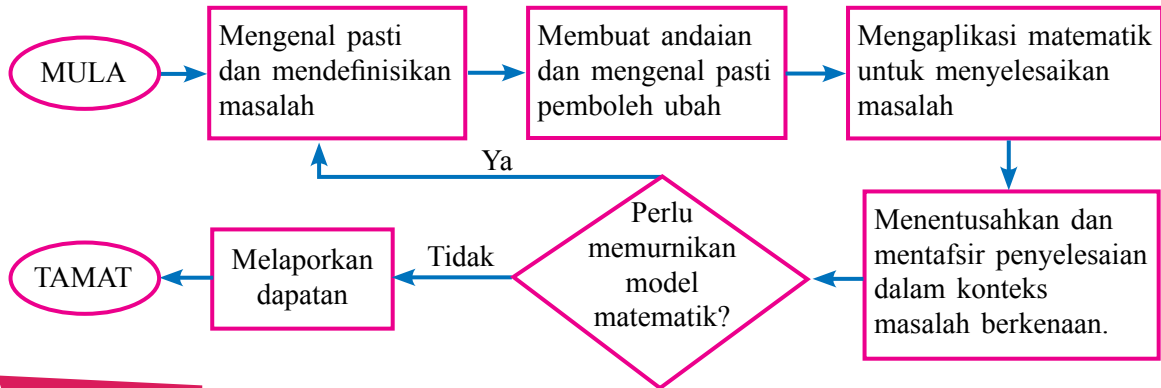
Laporan penuh dibuat berdasarkan struktur rangka kerja pemodelan di atas.

Latih Kendiri 8.1b

1. Seorang pelari berlatih untuk menyertai perlumbaan maraton. Dia berlatih mengikut rutin untuk berlari 32 km seminggu. Pelari itu bercadang menambahkan jarak larian $D(x)$, dalam km, sebanyak 10% daripada jarak larian pada minggu sebelumnya, dengan keadaan x mewakili bilangan minggu latihan. Terbitkan satu model matematik bagi jarak lariannya, $D(x)$. Selesaikan masalah ini melalui pemodelan matematik.
2. Keadaan suhu badan yang jauh lebih tinggi daripada paras normal dikenali sebagai hipertermia. Satu daripada punca hipertermia termasuk pendehidratan, iaitu kehilangan cecair melebihi jumlah yang diambil. Mengapa anak kecil mempunyai risiko yang lebih tinggi mengalami hipertermia berbanding dengan orang dewasa apabila berada di bawah cuaca panas? Selidik masalah ini melalui pemodelan matematik.

Arena Rumusan

PROSES PEMODELAN MATEMATIK



Refleksi

Pada akhir bab ini, saya dapat

menerangkan pemodelan matematik.

menyelesaikan masalah kehidupan sebenar melalui pemodelan matematik yang melibatkan fungsi:

- (i) Linear
- (ii) Kuadratik
- (iii) Eksponen

dan mengkomunikasikan proses pemodelan matematik yang dilaksanakan.



PROJEK MINI

Buka lembaran kerja untuk projek ini.

1. Anggarkan panjang pinggir pantai Malaysia dengan menggunakan unit 200 km dan unit 100 km.
2. Ramalkan keputusan anda jika panjang pinggir pantai diukur dengan menggunakan unit 50 km. Terangkan.
3. Jika anda terus mengurangkan saiz unit ukuran, apakah jangkaan anda terhadap nilai panjang pinggir pantai?
4. Adakah anda akan sampai ke suatu tahap yang mana anda akan dapat menentukan panjang pinggir pantai dengan tepat?

Setelah anda menentukan panjang pinggir pantai Malaysia dengan kaedah di atas, dapatkan panjang sebenar pinggir pantai Malaysia daripada sumber yang sahih. Carikan juga maklumat cara ahli geografi menentukan panjang pinggir pantai sesebuah negara. Sediakan laporan bertulis untuk proses pemodelan matematik yang dilaksanakan sepanjang projek ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/LKBab8 untuk mendapatkan lembaran kerja.

Latih Ekstensif

Imbas kod QR atau layari
bit.do/Kuiz08 untuk kuiz interaktif



FAHAM

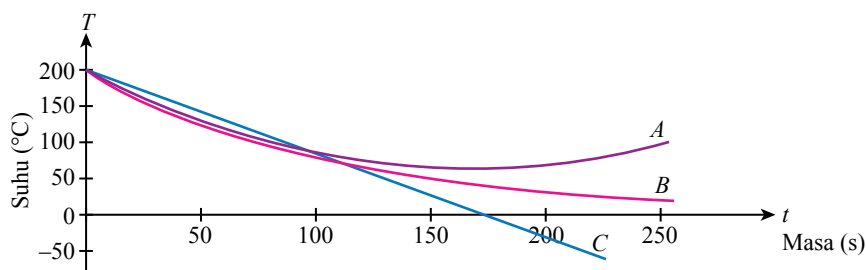
1. Nyatakan semua komponen dalam pemodelan matematik.

MASTERI

2. Seorang ahli sains sedang mengkaji pola penyejukan bagi sejenis bahan tertentu dalam suatu tempoh masa tertentu. Dalam kajiannya, ahli sains perlu memanaskan sampel bahan itu sehingga 200°C . Beliau kemudian mencatatkan suhu penyejukan sampel bahan itu sehingga suhu bilik. Jadual berikut menunjukkan data yang dikumpulkan bagi 2 minit pertama proses penyejukan.

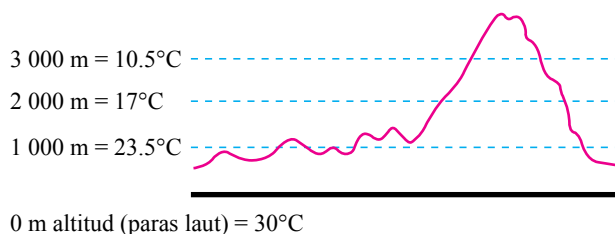
Masa (s)	0	40	80	120
Suhu ($^{\circ}\text{C}$)	200	140	100	75

Rajah di bawah menunjukkan tiga model yang mungkin bagi data tersebut, iaitu model linear, model kuadratik dan model eksponen.



- (a) Antara A , B dan C , yang manakah model linear, model kuadratik dan model eksponen?
- (b) Antara A , B dan C , model yang manakah paling baik menghuraikan suhu sampel bahan itu dalam julat masa $0 \leq t \leq 250$? Terangkan sebab model lain tidak dapat menghuraikan suhu dalam julat masa berkenaan dengan baik.

3. Apabila altitud bertambah, suhu biasanya menurun. Secara purata, kadar penurunan suhu bagi troposfera (lapisan pertama atmosfera bumi) ialah 6.5°C per 1 000 m. Rajah di bawah menunjukkan keratan rentas Gunung Kinabalu (4 095 m) di Sabah dengan suhu yang berbeza pada altitud berlainan. Suhu pada altitud 0 m (paras laut) ialah 30°C .

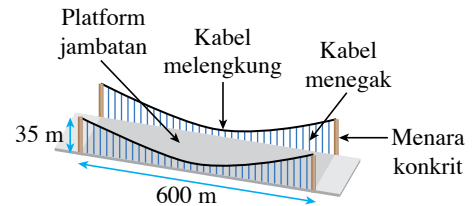


- (a) Tulis satu persamaan yang mengungkapkan suhu, $T^{\circ}\text{C}$ sebagai satu fungsi dalam altitud, x m, bagi situasi yang ditunjukkan dalam rajah di atas.

- (b) Sahkan persamaan anda di (a) adalah munasabah dengan menggunakan data yang diberi dalam rajah.
- (c) Lukis satu graf yang menunjukkan hubungan antara x dengan T . Tunjukkan dengan jelas skala pada setiap paksi dan labelkan paksi anda.
- (d) Apakah julat yang munasabah bagi fungsi $T(x)$? Justifikasikan jawapan anda.
- (e) Apakah kecerunan bagi graf yang dilukis? Apakah pengertian kecerunan graf tersebut dalam konteks suhu dan altitud?
- (f) Apakah pintasan- y bagi graf yang dilukis? Apakah pengertian pintasan- y bagi graf tersebut dalam konteks suhu dan altitud?
- (g) Adakah munasabah untuk membuat andaian bahawa suhu selalu berkurangan pada kadar linear apabila altitud bertambah? Terangkan jawapan anda.

CABAR

4. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah jambatan gantung. Jarak terdekat dari kabel melengkung ke platform jambatan ialah 5 m. Dengan menggunakan pemodelan matematik, tunjukkan cara seorang jurutera boleh menggunakan maklumat yang diberi untuk menyelesaikan masalah berikut.



- (a) Tentukan fungsi yang mewakili kabel melengkung itu.
- (b) Tentukan bilangan kabel menegak yang diperlukan di kedua-dua belah jambatan jika jarak di antara dua kabel menegak yang berturutan ialah 20 m.
- (c) Tentukan jenis bahan kabel yang harus digunakan supaya jumlah kos kabel menegak adalah minimum.

Jarak di antara kabel menegak (m)	Jenis bahan kabel	Kos per m (RM)	Jumlah kos kabel menegak (RM)
15	<i>A</i>	750	
20	<i>B</i>	1 000	
25	<i>C</i>	1 200	

TEROKAI MATEMATIK

Kelas anda ingin mengadakan jamuan akhir tahun. Anda ditugaskan untuk menentukan jenis piza yang perlu ditempah supaya memenuhi cita rasa kebanyakan rakan kelas anda. Pertimbangan anda meliputi syarikat piza, jarak penghantaran, kos piza, saiz piza, cara penghantaran (mengambil sendiri, melalui aplikasi telefon dan lain-lain), jenis piza (vegetarian, bebas gluten dan lain-lain), jenis hias atas (tomato, keju, bawang putih dan lain-lain) dan sebagainya.

Selesaikan masalah ini melalui pemodelan matematik. Anda boleh menggunakan pemboleh ubah untuk mewakili kuantiti yang boleh berubah dan menggunakan persamaan untuk mewakili hubungan antara kuantiti ini. Bagi soalan berbentuk kualitatif misalnya jenis hias atas, anda boleh mencipta satu sistem pengskoran yang mengambil kira nilai kalori, nutrien dan sebagainya. Dalam proses pemodelan, anda juga mungkin boleh membuat andaian dengan mengehadkan jenis pilihan supaya skop pemodelan menjadi lebih kecil.

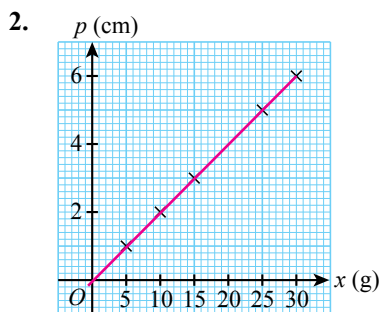
BAB 1 Ubahan

Latih Kendiri 1.1a

- (a) Nilai rintangan bertambah 10%.
(b) Nilai rintangan berkurang separuh daripada nilai rintangan asal.
(c) Nilai suhu berkurang $\frac{1}{4}$ daripada nilai suhu asal.
- (a) Harga berkurang separuh daripada harga RMx sekilogram.
(b) Harga bertambah dua kali ganda daripada harga RMx sekilogram.
- (a) Penghasilan bilangan botol jem bertambah sebanyak dua kali ganda.
(b) Penghasilan bilangan botol jem dikurangkan separuh.

Latih Kendiri 1.1b

- (a) y berubah secara langsung dengan x . $y \propto x$
(b) y berubah secara langsung dengan $\sqrt{x}$.
 $y \propto \sqrt{x}$



Graf p melawan x menunjukkan satu garis lurus melalui asalan. Maka, p berubah secara langsung dengan x .

- (a) $p = 0.5q^3$
(b) $p = 16\sqrt{q}$
- $x = 8t$
- (a) 15 (b) 125
- (a) 1.6 (b) 0.343
- 15 minit
- 6 saat

- (a) $x = \frac{1}{12}d$
(b) 3.75 liter

Latih Kendiri 1.1c

- (a) $s \propto tu$
(b) $v \propto w^2x$
(c) $a \propto b^3\sqrt{c}$
(d) $L \propto jh$
- (a) $k = 0.5$
(b) $k = 10$
- (a) $y = \frac{3}{2}z\sqrt{x}$
(b) $y = \frac{3}{8}xz^2$
- $x = 0.02pj^2$
- (a) 54
(b) 0.36
- $x = 16, y = 0.3$
- 16 m s^{-1}
- $3\,300 \text{ cm}^3$

Latih Kendiri 1.1d

- (a) $V = 0.16t$
(b) 2:15 petang
- (a) $L = 0.5xy$
(b) Luas bertambah 8%.
- Tidak. Piza dengan diameter 30 cm lebih berbaloi dengan harganya.

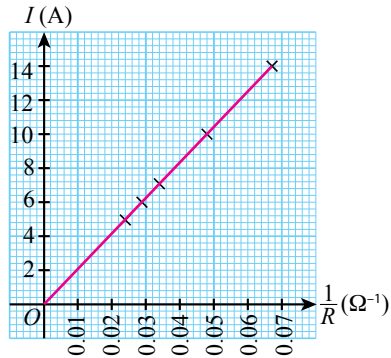
Latih Kendiri 1.2a

- (a) Bilangan hari dibahagikan dengan dua.
(b) Bilangan hari berganda dua.
- (a) Bilangan hadiah berkurang dua kali ganda.
(b) Bilangan hadiah bertambah 50%.

Latih Kendiri 1.2b

- (a) y tidak berubah secara songsang dengan x .
(b) y berubah secara songsang dengan x^2 .
 $y \propto \frac{1}{x^2}$

2.



Graf I melawan $\frac{1}{R}$ menunjukkan satu garis lurus bermula daripada asalan. Maka, I berubah secara songsang dengan R .

3. (a) $g = \frac{1.2}{h}$

(b) $g = \frac{9.6}{h^2}$

(c) $g = \frac{0.3}{\sqrt[3]{h}}$

4. (a) 200

(b) 32 000 000

(c) 10

(d) 3.684

5. (a) $s = 4, t = 1.2$

(b) $s = 25, t = 60$

6. (a) $T = \frac{60}{M}$

(b) $p = 7.5, q = 15$

7. $T = \frac{3.17}{\sqrt{g}}$

Latih Kendiri 1.2c

1. (a) R berubah secara songsang dengan j^2 .

(b) 0.24 mm

2. 0.6 cm

3. 12.96 cm

Latih Kendiri 1.3a

1. (a) $w \propto \frac{\sqrt[3]{v}}{x^2}, w = \frac{k\sqrt[3]{v}}{x^2}$

(b) $F \propto \frac{GH^3}{\sqrt{t}}, F = \frac{kGH^3}{\sqrt{t}}$

(c) $A \propto \frac{j}{t^2}, A = \frac{kj}{t^2}$

2. $t = \frac{c}{100p}$

3. (a) $P = 1.44$

(b) $N = 19$

4. $a = 125; b = 2.25$

Latih Kendiri 1.3b

1. (a) 400 keping

(b) Bilangan jubin yang diperlukan berkurang.

2. (a) 90 km

(b) 70 400 penduduk

Latih Ekstensif

1. (a) $w \propto x^3$

(b) $a \propto \frac{b}{c^3}$

(c) $p \propto q\sqrt{r}$

(d) $s \propto at^2$

2. $y \propto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

3. (a) y berubah secara langsung dengan x dan z .

(b) e berubah secara songsang dengan f .

(c) p berubah secara langsung dengan $\sqrt[3]{q}$ dan secara songsang dengan r .

(d) n berubah secara langsung dengan p dan q^2 , dan secara songsang dengan $\sqrt{r}$.

4. (a) Ya

(b) Tidak

(c) Tidak

(d) Ya

5. (a) 0.5

(b) $\frac{1}{3}$

(c) 1.4

6. $m = \frac{12}{np}$

7. ± 1.4

8. $m = 9.6, n = 0.64$

9. (a) $P = \frac{1}{5Q}$

(b) 0.68

10. 0.3 A

11. (a) 154 cm²

(b) Luas permukaan melengkung akan berkurang.

12. (a) 0.075

(b) 137.5%

13. Santhami meningkatkan kelajuannya sebanyak 5.28 km per jam (31.68 km/j – 26.4 km/j).

BAB 2 Matriks

Latih Kendiri 2.1a

1. $\begin{bmatrix} 857 & 3180 & 211 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 857 \\ 3180 \\ 211 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 53 & 52 & 50 \\ 20 & 21 & 20 \\ 47 & 48 & 46 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 53 & 20 & 47 \\ 52 & 21 & 48 \\ 50 & 20 & 46 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 20 & 18 & 15 \\ 12 & 10 & 11 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 20 & 12 \\ 18 & 10 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}$

Latih Kendiri 2.1b

1. (a) 1×2 (b) 2×1
(c) 3×3 (d) 2×3
2. (a) (i) 3×2
(ii) 0
(iii) 9
(b) (i) 3×3
(ii) 16
(iii) 9
3. $2 \times 3, f_{13} = 2, f_{22} = 3, f_{11} = -8$
4. 4

Latih Kendiri 2.1c

1. (a) Sama
(b) Sama
(c) Tidak sama
(d) Tidak sama
2. (a) $x = 6, y = 2, z = \frac{1}{2}$
(b) $x = 2, y = -\frac{7}{2}, z = -4$

Latih Kendiri 2.2a

1. (a) Boleh (b) Tidak boleh
(c) Tidak boleh (d) Boleh
2. (a) $\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$
3. (a) $\begin{bmatrix} 13 & 9 & 10 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 13 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} -16 \\ 18 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 16 & 14 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$
4. $a = 3, b = -17$
5. $x = 3, y = 1, z = 0$

$$6. \begin{bmatrix} -15 & 2 \\ 11 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} 2650 \\ 1560 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1890 \\ 910 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 930 \\ 540 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 850 \\ 260 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2760 \\ 1670 \end{bmatrix}$$

Latih Kendiri 2.2b

1. (a) $\begin{bmatrix} -21 \\ 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6.6 & 3 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -\frac{3}{2} & 4 \\ \frac{9}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -0.8 & -16 \\ 18 & -5 \end{bmatrix}$
(e) $\begin{bmatrix} 12 & -1.2 & 13.2 \\ 3.6 & 8.4 & -6 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -5 \\ \frac{9}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$
2. (a) $\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 16.5 & -2 \\ 2 & -19 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -12 \\ 23 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 14 & -16 & 10 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2.2 & 2.1 \end{bmatrix}$

$$3. (E + F) + G = \begin{bmatrix} 2 & 28 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 38 \\ -3 & 20 \end{bmatrix}$$

$$E + (F + G) = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 32 \\ -5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 38 \\ -3 & 20 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} -5.1 \\ 6.3 \end{bmatrix}$$

$$5. a = 20, b = \frac{1}{4}, c = 1$$

$$6. \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} 85 & 70 \\ 110 & 98 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 33 & 24 \\ 42 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 46 \\ 68 & 58 \end{bmatrix}$$

Latih Kendiri 2.2c

1. (a) Ya, 2×1
(b) Ya, 2×3
(c) Tidak
(d) Tidak
(e) Ya, 2×3
(f) Tidak

2. (a) $\begin{bmatrix} -5 & 19 \\ -7 & 16 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -12 & 16 \\ 9 & -23 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -8 \\ 28 \\ -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -10 \\ -26 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 19 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 45 & -82 \end{bmatrix}$

3. $x = 5, y = 2$

4. $r = -3.5, s = 2$

5. (a) $p = 2, q = 7, r = 1$

(b) $p = -1, q = 3, r = 6$

(c) $p = 3, q = -23.2, r = 5$

(d) $p = -7, q = -15, r = 15$

6. $\begin{bmatrix} 40 & 28 & 36 \\ 42 & 36 & 30 \\ 35 & 25 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 640 \\ 678 \\ 627 \end{bmatrix}$

Latih Kendiri 2.2d

1. (a) Bukan. Ini bukan matriks segi empat sama.

(b) Bukan. Unsur di pepenjuru utama bukan 1.

(c) Bukan. Unsur di pepenjuru utama bukan 1.

(d) Ya.

(e) Ya.

(f) Bukan. Unsur di pepenjuru utama bukan 1.

2. $CD = DC = C$. Maka, D ialah matriks identiti.

3. (a) $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 11 & 15 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ -20 & 15 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

Latih Kendiri 2.2e

1. (a) Bukan matriks songsang

(b) Bukan matriks songsang

(c) Bukan matriks songsang

(d) Ya. Matriks songsang

Latih Kendiri 2.2f

1. (a) Wujud, $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Wujud, $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) Wujud, $\begin{bmatrix} -3 & -\frac{5}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(d) Tidak wujud

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3. (a) $\frac{3}{2}$

(b) 4

4. $\begin{bmatrix} -1 & 10 \\ \frac{1}{2} & -4 \end{bmatrix}$

Latih Kendiri 2.2g

1. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -14 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -10 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -12 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ \frac{1}{5} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0.8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -14 \end{bmatrix}$

3. (a) $x = 5, y = 0$

(b) $x = -2, y = -1$

(c) $x = 3, y = -2$

(d) $x = 2, y = -1$

- (e) $x = 0.5, y = 3$
 (f) $x = 1.5, y = 0.3$
 (g) $p = -2, q = 2$
 (h) $m = 3, n = 2$

Latih Kendiri 2.2h

1. harga satu karipap sardin = RM0.60,
harga satu karipap kentang = RM0.80
2. tempoh berenang = 6 jam,
tempoh bermain badminton = 4 jam
3. harga sekilogram betik = RM4,
harga sekilogram pisang = RM5
4. bilangan kereta = 29,
bilangan motosikal = 37
5. kadar dividen Amanah Saham P = 4%,
kadar dividen Amanah Saham Q = 5%

Latih Ekstensif

1. 3 baris dan 2 lajur
2. 3×1
3. -6
4. $E + E + E = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$
 $3E = 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
6. $r = -3, s = 3$
7. $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$
8. $x = 1, y = -7, z = 9$
9. (a) $\begin{bmatrix} -37 & 54 \\ 81 & -118 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 9 & -14 \end{bmatrix}$
10. $p = 2, q = 6$
11. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -19 \end{bmatrix}$
 (b) $x = -1, y = 2$

12. bilangan peserta lelaki = 80,
bilangan peserta perempuan = 48

13. $p = -2q$

14. (a) $\begin{bmatrix} 80 & 70 \\ 60 & 75 \\ 74 & 84 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

- (b) 76
 (c) Sains Komputer

15. (a) $6p + 4q = 16$
 $95p + 110q = 300$

- (b) bilangan gelas minuman P = 2,
bilangan gelas minuman Q = 1

16. bilangan pendingin hawa K = 32,
bilangan pendingin hawa L = 18

BAB 3 Matematik Pengguna: Insurans

Latih Kendiri 3.1a

1. (a) Syarikat insurans: Syarikat Insurans Bersatu
Pemegang polisi: Encik Daud
 (b) RM300 000
 (c) RM100
 (d) Kemalangan diri
2. Kos rawatan kecederaan, kerugian dan kerosakan kereta yang dialami oleh pihak ketiga sahaja.

Latih Kendiri 3.1b

1. Risiko mengalami kemalangan bagi pekerjaan kelas 3 lebih tinggi berbanding kelas 1 dan 2.
2. (a) Merokok: RM330.00; Tidak merokok: RM254.40
 (b) Merokok: RM175.20; Tidak merokok: RM147.60
3. Polisi komprehensif = RM1 789.62; Polisi pihak ketiga, kebakaran dan kecurian = RM1 342.21; polisi pihak ketiga = RM117.18

Latih Ekstensif

1. (i) Risiko kecurian harta benda dalam kedai yang dimasuki pencuri.
 (ii) Risiko barang dagangan rosak semasa dalam perjalanan.
 (iii) Risiko bangunan kedai terbakar.
 (Terima jawapan lain yang sesuai)

2. Untuk memastikan pemegang polisi berada dalam kedudukan kewangan yang sama seperti sebelum kerugian berlaku. Oleh itu, pemegang polisi tidak boleh mengaut keuntungan daripada pembayaran pampasan kerugian tersebut.
3. Insurans kemalangan diri melindungi pemegang polisi sekiranya berlaku kecederaan, kecacatan, hilang upaya atau meninggal dunia berpunca secara langsung daripada kemalangan. Insurans hayat membayar pampasan sekiranya pemegang polisi meninggal dunia kerana kematian biasa, penyakit atau kemalangan dalam tempoh perlindungan manakala insurans perubatan dan kesihatan melindungi belanja perubatan, faedah penyakit kritikal dan lain-lain.
4. Polisi pihak ketiga, kebakaran dan kecurian atau polisi komprehensif.
5. Tidak boleh kerana Vanitha tidak mempunyai kepentingan boleh insurans ke atas kereta itu disebabkan sahabatnya masih pemilik polisi insurans kereta tersebut.
6. (a) RM50.38
(b) (i) RM796
(ii) RM244
7. Tidak boleh buat tuntutan bagi kerugian RM90. Bagi kerugian RM240, bayaran pampasan ialah RM90 dan bagi kerugian RM300, bayaran pampasan ialah RM150.
8. 2019: Jumlah yang ditanggung = RM5 000
Bayaran pampasan = RM125 000
2020: Jumlah yang ditanggung = RM5 000
Bayaran pampasan = RM7 000
9. (a) RM910 000
(b) (i) RM910 000
(ii) RM546 000
10. (a) RM200 000
(b) Tidak. Encik Adam akan menerima bayaran pampasan maksimum sebanyak RM200 000, iaitu nilai muka insurans yang dibelinya.
11. Bayaran yang ditanggung oleh Sofia = RM2 400
Bayaran pampasan = RM8 400

Matematik Pengguna:

BAB 4 Percukaian

Latih Kendiri 4.1a

1. Sebagai sumber pendapatan kerajaan, alat pelaksanaan polisi kerajaan, kawalan penjualan barangan atau perkhidmatan, alat kewangan untuk menstabilkan ekonomi
2. Cukai Keuntungan Harta Tanah berfungsi sebagai alat pelaksanaan polisi kerajaan. Cukai ini dikenakan untuk mengurangkan aktiviti pelaburan hartanah yang keterlaluan.

Latih Kendiri 4.1b

1. Cukai pintu atau cukai taksiran ialah cukai yang dikenakan kepada semua pegangan atau harta tanah untuk membiayai kos penyelenggaraan bandar.
2. Encik Tan boleh didenda tidak melebihi RM2 000.
3. Pengeluar atau pengimport dengan nilai jualan barangan bercukai melebihi RM500 000 setahun perlu berdaftar bawah Akta Cukai Jualan 2018.

4. Cukai tanah	Cukai pintu
dikutip oleh pihak berkuasa negeri iaitu Pejabat Tanah dan Galian	dikutip oleh pihak berkuasa tempatan iaitu majlis perbandaran atau majlis daerah

5. Seseorang yang sengaja mengelakkan cukai pendapatan boleh didenda RM1 000 hingga RM20 000 atau dipenjarakan tidak melebihi 3 tahun atau kedua-duanya dan penalti 300% atas cukai terkurang lapor.

Latih Kendiri 4.1c

1. (a) RM75 840
(b) RM52 410
(c) RM49 960
(d) RM95 021
2. (a) RM12 971.20
(b) RM3.20
(c) RM121.60
(d) RM885.16

3. RM881.84
4. RM2 115.31
5. Encik Subra perlu membayar RM712 dan isterinya perlu membayar RM68. Maka, jumlah cukai pendapatan bagi Encik Subra dan isterinya ialah RM780.
6. Cukai jalan motosikal 220 cc = RM50
Cukai jalan kereta 1 860 cc = RM310
7. RM900
8. RM45
9. RM21.20

Latih Kendiri 4.1d

1. RM2 399.34
2. (a) RM99 950
(b) RM8 389.50
(c) Encik Jamil tidak perlu membuat bayaran cukai yang tidak mencukupi kepada LHDN. Jumlah PCB yang dipotong (RM16 800) melebihi cukai pendapatannya (RM8 389.50).

Latih Ekstensif

1. Cukai boleh dijadikan sebagai alat pelaksanaan polisi kerajaan supaya polisi tersebut mendapat kesan yang lebih efektif. Cukai Keuntungan Harta Tanah dikenakan apabila kerajaan hendak mengurangkan aktiviti pelaburan hartanah yang keterlaluan. Cukai Perkhidmatan Digital dikenakan untuk mewujudkan pentas persaingan yang seimbang kepada syarikat tempatan. Levi Pelepasan dikenakan terhadap individu yang meninggalkan Malaysia dengan pengangkutan udara bagi menggalakkan pembangunan pelancongan dalam negara.
2. (a) Lembaga Hasil Dalam Negeri
(b) Pihak berkuasa tempatan iaitu majlis perbandaran atau majlis daerah
(c) Jabatan Pengangkutan Jalan
(d) Jabatan Kastam Diraja Malaysia
3. Cukai pendapatan
4. Pihak berkuasa tempatan boleh menyita harta mudah alih pemilik harta yang tidak membayar cukai pintu.
5. Pelepasan cukai ialah perkara atau perbelanjaan bagi kepentingan persendirian atau ahli-ahli keluarga yang tidak dikenakan cukai pendapatan.

6. Rebat cukai sebanyak RM400 akan diberikan kepada pembayar cukai sekiranya pendapatan bercukainya tidak melebihi RM35 000. Jumlah bayaran zakat atau fitrah juga merupakan rebat.
7. RM61.37
8. RM63 500
9. RM0
10. 1 800 cc
11. 4.5%
12. (a) Gerai itu mungkin tidak menjana hasil melebihi RM1 500 000 setahun.
(b) RM13.96
13. RM3 508
14. (a) RM31 970
(b) Ya. Eng Huat layak menerima rebat cukai sebanyak RM400 kerana pendapatan bercukainya kurang daripada RM35 000.
(c) RM109.10
15. (a) RM60 300
(b) RM2 642
(c) Puan Aida tidak perlu membuat bayaran cukai pendapatan kerana jumlah PCB yang dipotong melebihi cukai pendapatannya.

Kekongruenan, Pembesaran dan Gabungan Transformasi

BAB 5

Latih Kendiri 5.1a

1. (a) kongruen
(b) bukan kongruen
(c) kongruen
(d) bukan kongruen
2. A dan F adalah kongruen,
 B dan E adalah kongruen

Latih Kendiri 5.1b

1. (a) $PR = XZ$ dan $\angle QPR = \angle YXZ$
atau $QR = YZ$ dan $\angle PQR = \angle XYZ$
(b) Luas segi tiga PQR dan XYZ mesti sama.
 $PR = XZ$ dan $\angle PRQ = \angle XZY$
atau $PR = XZ$ dan $\angle PQR = \angle XYZ$
atau $QR = YZ$ dan $\angle QPR = \angle YXZ$
atau $QR = YZ$ dan $\angle PRQ = \angle XZY$
2. (a) Sisi-Sisi-Sisi (SSS)
(b) Sudut-Sisi-Sudut (ASA)

Latih Kendiri 5.1c

1. $AC = CD$, $\angle ABC = \angle DEC$, $\angle BAC = \angle EDC$
Memenuhi sifat Sudut-Sudut-Sisi (AAS).
Maka, $\triangle ABC$ dan $\triangle DEC$ adalah kongruen.
atau
 $AC = CD$, $\angle BAC = \angle EDC$, $\angle BCA = \angle ECD$
Memenuhi sifat Sudut-Sisi-Sudut (ASA).
Maka, $\triangle ABC$ dan $\triangle DEC$ adalah kongruen.
2. (a) 12 cm
(b) 97°
3. (a) 212 m
(b) 1620 m^2

Latih Kendiri 5.2a

1. (a) serupa
(b) tidak serupa
(c) tidak serupa
(d) serupa
2. A dan I adalah serupa,
 B dan G adalah serupa,
 D dan F adalah serupa

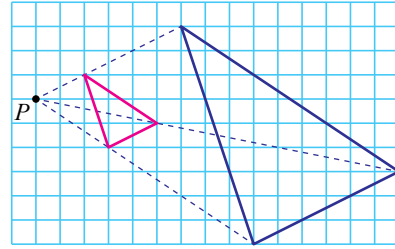
Latih Kendiri 5.2b

1. (a) Pembesaran pada pusat $(-4, 4)$ dengan faktor skala 3
(b) Pembesaran pada pusat $(6, -5)$ dengan faktor skala 2
(c) Pembesaran pada pusat $(5, 2)$ dengan faktor skala $\frac{1}{2}$
(d) Pembesaran pada pusat $(7, 4)$ dengan faktor skala $-\frac{3}{2}$
2. (a) Pembesaran pada pusat P dengan faktor skala $\frac{5}{2}$
(b) Pembesaran pada pusat P dengan faktor skala $\frac{8}{5}$
(c) Pembesaran pada pusat P dengan faktor skala $\frac{1}{4}$

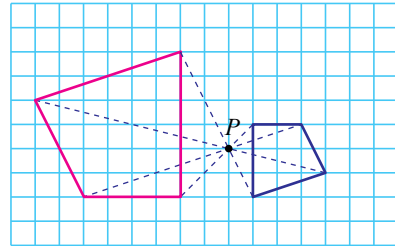
Latih Kendiri 5.2c

1. (a) $A = \text{objek}$, $B = \text{imej}$
(b) $M = \text{imej}$, $N = \text{objek}$

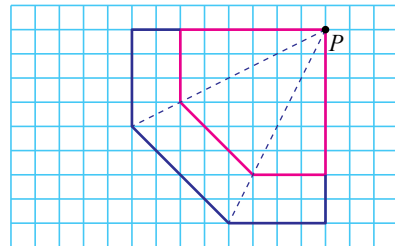
2. (a)



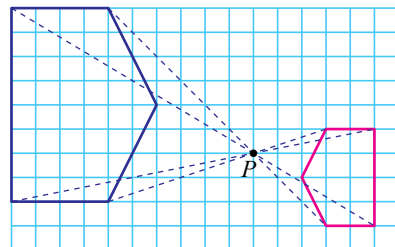
(b)



3. (a)



(b)



Latih Kendiri 5.2d

1. Luas objek	Luas imej	Faktor skala, k
18 unit ²	72 unit ²	2 atau -2
54 m ²	6 m ²	$\frac{1}{3}$
20 cm ²	31.25 cm ²	$\frac{5}{4}$

Latih Kendiri 5.2e

1. (a) $-\frac{2}{5}$ (b) 87 cm^2
2. 40 m
3. 51 cm^2
4. 50

Latih Kendiri 5.3a

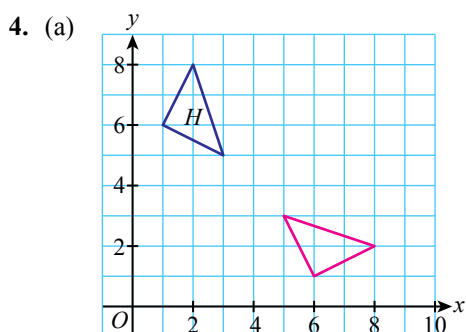
- (a) Pentagon II (b) Pentagon III
- (a) Segi tiga P (b) Segi tiga S
- (a) (i) Titik E (ii) Titik G
(b) Titik D

Latih Kendiri 5.3b

- (a) gabungan transformasi PQ mematuhi sifat kalis tukar tertib
(b) gabungan transformasi PR tidak mematuhi sifat kalis tukar tertib

Latih Kendiri 5.3c

- Transformasi A ialah putaran 90° lawan arah jam pada pusat $(4, 6)$.
Transformasi B ialah pantulan pada garis $y = 4$.
- Transformasi P ialah pembesaran pada pusat $(7, 2)$ dengan faktor skala 2.
Transformasi Q ialah translasi $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.
- (a) Transformasi B ialah pantulan pada garis $y = 3$
(b) putaran 180° pada pusat $(5, 3)$



- (b) pantulan pada garis $y = x$

Latih Kendiri 5.3d

- (a) Transformasi P ialah pembesaran pada pusat $(5, 4)$ dengan faktor skala 2.
Transformasi Q ialah translasi $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
(b) pembesaran pada pusat $(1, 10)$ dengan faktor skala 2
(c) 2.5 unit^2

- (a) $y = -x$
(b) pembesaran pada pusat $(-5, -4)$ dengan faktor skala $\frac{5}{2}$
(c) 315 m^2

Latih Kendiri 5.4a

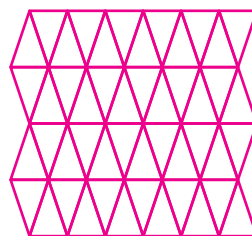
- (a) Ya
(b) Ya
(c) Bukan
(d) Bukan

Latih Kendiri 5.4b

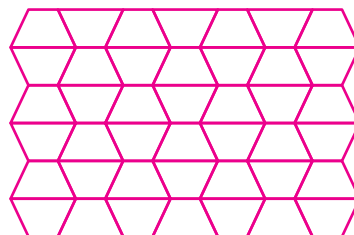
- (a) pantulan pada garis PQ atau translasi $\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ atau putaran 120° ikut arah jam pada pusat P
(b) pantulan pada garis SR atau putaran 120° lawan arah jam pada pusat S
(Terima jawapan lain yang betul)

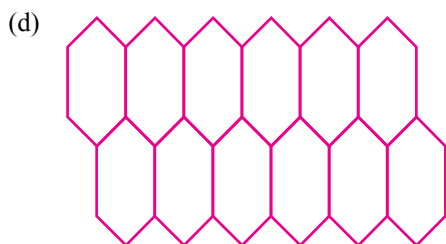
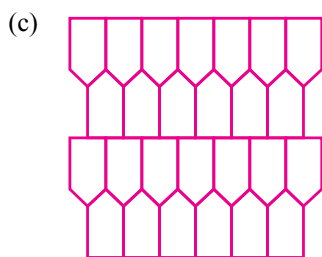
Latih Ekstensif

- 112°
- 10.5 cm
- pembesaran pada pusat $(3, 3)$ dengan faktor skala 3
- $\frac{4}{3}$ atau $-\frac{4}{3}$
- $(8, 8)$
- putaran 90° lawan arah jam pada pusat $(3, 6)$
- (a)



- (b)





8. (a) (i) pembesaran pada pusat (6, 3) dengan faktor skala $\frac{2}{3}$
 (ii) pantulan pada garis $x = 5$ atau
 (a) (i) pantulan pada garis $x = 5$
 (ii) pembesaran pada pusat (4, 3) dengan faktor skala $\frac{2}{3}$
 (b) 22.5 unit²
9. $\frac{5}{2}$
10. 1 215 cm
11. (a) 1 003.96 m
 (b) 20 000 m²
12. Transformasi **X** ialah pantulan pada garis JM .
 Transformasi **Y** ialah putaran 36° lawan arah jam pada pusat J .

Nisbah dan Graf Fungsi

BAB 6 Trigonometri

Latih Kendiri 6.1a

1. (a) 83° (b) 9°
 (c) 82° (d) 15.8°
 (e) 73.6° (f) 54.3°
 (g) 51°7' (h) 35°42'
2. (a) $\sin 101^\circ = \sin 79^\circ$
 (b) $\cos 194^\circ = -\cos 14^\circ$
 (c) $\tan 246^\circ = \tan 66^\circ$
 (d) $\tan 294.5^\circ = -\tan 65.5^\circ$

- (e) $\sin 339.8^\circ = -\sin 20.2^\circ$
 (f) $\cos 112.3^\circ = -\cos 67.7^\circ$
 (g) $\cos 287^\circ 45' = \cos 72^\circ 15'$
 (h) $\tan 96^\circ 31' = -\tan 83^\circ 29'$
 (i) $\sin 203^\circ 26' = -\sin 23^\circ 26'$

3. $\sin \theta = -0.8290$, $\cos \theta = 0.5592$,
 $\tan \theta = -1.4825$

Latih Kendiri 6.1b

1. (a) 0.7880 (b) -0.8290
 (c) -0.3907 (d) -0.9613
 (e) 0.3256 (f) -0.6018
 (g) 0.8693 (h) -1.0355
 (i) -0.9657 (j) -0.7983
 (k) -0.3140 (l) -0.1616
 (m) 0.6108 (n) -4.4615
 (o) -0.3040

Latih Kendiri 6.1c

1. (a) $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$,
 $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$
 (b) $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
 $\tan 135^\circ = -1$
 (c) $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\tan 210^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 (d) $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$,
 $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$
 (e) $\sin 315^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 315^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
 $\tan 315^\circ = -1$
 (f) $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\tan 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
2. Sudut θ berada dalam sukuan I:
 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $\tan \theta = \sqrt{3}$
 Sudut θ berada dalam sukuan II:
 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, $\tan \theta = -\sqrt{3}$

Latih Kendiri 6.1d

- (a) 70° atau 110° (b) 21° atau 339°
 (c) 40° atau 220° (d) 129.9° atau 309.9°
 (e) 127° atau 233° (f) 227° atau 313°
 (g) 125.7° atau 234.3° (h) 237.1° atau 302.9°
 (i) 36.5° atau 216.5°
- 250.1°

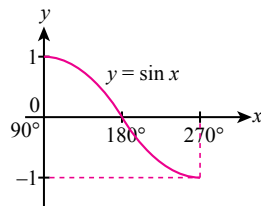
Latih Kendiri 6.1e

- (a) $-\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$
- (a) Sukuan I dan II (b) 54° atau 126°
- (a) 122.08° (b) 9.68 m
 (c) -0.5534
- (a) 150° (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

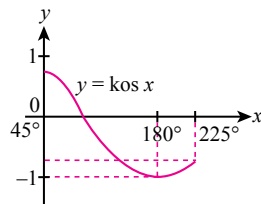
Latih Kendiri 6.2a

- (a) kosinus
 (b) tangen
 (c) sinus

2. (a)



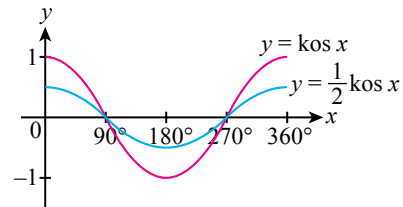
(b)



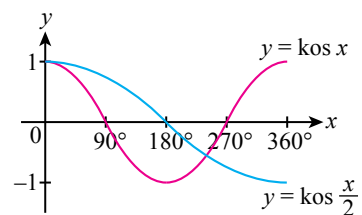
- Graf I: $y = \tan x$; tiada nilai maksimum, nilai minimum = 0
 Graf II: $y = \sin x$; nilai maksimum = 1, nilai minimum = 0
 Graf III: $y = \cos x$; nilai maksimum = 1, nilai minimum = 0
- (a) $x = 90^\circ$ apabila $y = 1$
 (b) $x = 0^\circ, 360^\circ$ apabila $y = 1$
 (c) Tiada nilai maksimum
- (a) kosinus, $m = 270^\circ$
 (b) sinus, $m = 90^\circ$

Latih Kendiri 6.2b

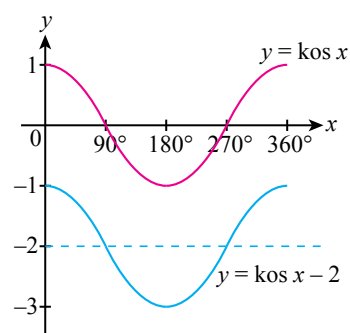
- (a) 4, 360° (b) 3, 180°
 (c) 2, 120° (d) 1, 90°
 (e) 4, 180° (f) 3, 120°
 (g) Tiada, 60° (h) Tiada, 540°
 (i) Tiada, 90°
- (a)



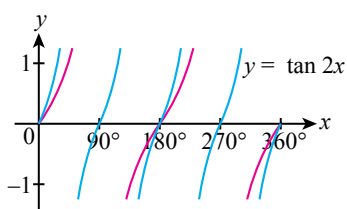
(b)



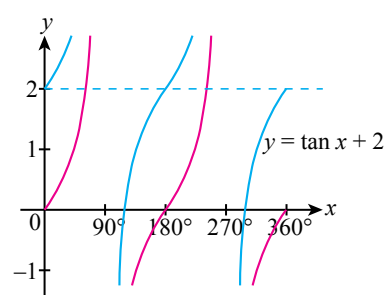
(c)



3. (a)



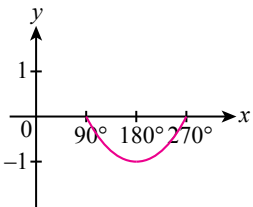
(b)



Latih Kendiri 6.2c

- (a) $y = 3 \cos 30x + 9$
(b) 0, 12, 24
- (a) $s = 500 \tan x$
(b) Tiada amplitud, tempoh = 180°
- $y = 1.1 \sin 15x + 2.9$

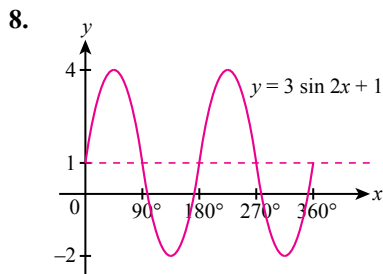
Latih Ekstensif

- (a) $\tan 154^\circ = -\tan 26^\circ$
(b) $\sin 234^\circ = -\sin 54^\circ$
(c) $\cos 314^\circ = \cos 46^\circ$
- (a) -0.4384 (b) 0.6160
(c) -0.8131
- 144° atau 324°
- 

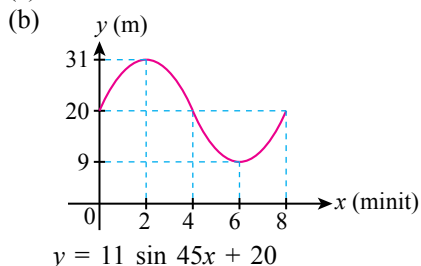
5. nilai maksimum = 2, nilai minimum = -4

- (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

7. 0.6613



- (a) $y = \sin x$ (b) 30°
- (a) kosinus (b) 3 ampere
(c) 1.6 saat
- $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- 11.5 m
- (a) sinus



14. $s = 5 \tan x$

BAB 7 Sukatan Serakan Data Terkumpul

Latih Kendiri 7.1a

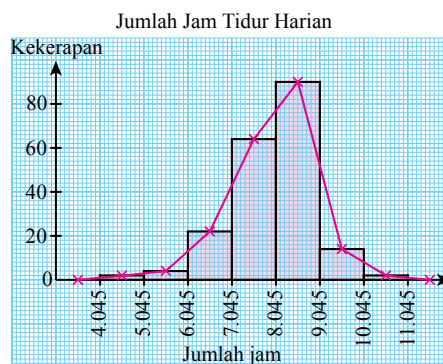
1.

Kelas	Kekerapan	Had bawah	Had atas	Titik tengah	Sempadan bawah	Sempadan atas
0 - 9	7	0	9	4.5	0	9.5
10 - 19	21	10	19	14.5	9.5	19.5
20 - 29	10	20	29	24.5	19.5	29.5
30 - 39	10	30	39	34.5	29.5	39.5
40 - 49	2	40	49	44.5	39.5	49.5

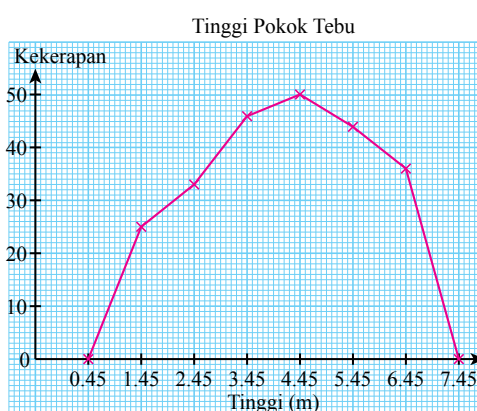
2.

Titik tengah	Had bawah	Had atas	Sempadan bawah	Sempadan atas	Kekerapan longgokan
2.2	2.0	2.4	1.95	2.45	9
2.7	2.5	2.9	2.45	2.95	24
3.2	3.0	3.4	2.95	3.45	48
3.7	3.5	3.9	3.45	3.95	68
4.2	4.0	4.4	3.95	4.45	78

3.



4.

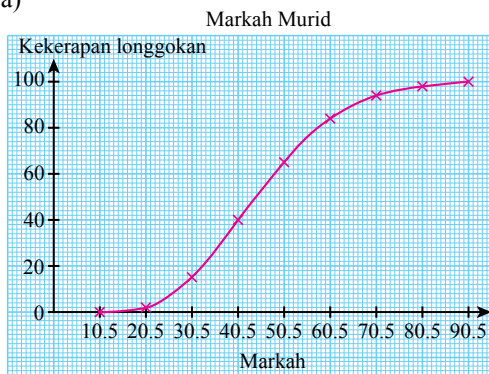


Latih Kendiri 7.1b

- (a) Bentuk taburan markah bagi kumpulan Arif ialah hampir seragam manakala bagi kumpulan Bestari ialah berbentuk loceng dan mempunyai nilai ekstrem.
- (b) Markah kumpulan Arif terserak dengan lebih luas berbanding kumpulan Bestari.
- (c) Kumpulan Bestari kerana kebanyakan markah adalah lebih baik.
- (a) Bentuk taburan di lokasi A pencong ke kanan, manakala di lokasi B, bentuk taburan ialah bentuk loceng.
- (b) Taburan laju kereta di lokasi A terserak lebih kecil berbanding dengan di lokasi B.
- (c) Lokasi B mewakili kawasan lebuh raya dan lokasi A mewakili kawasan perumahan.

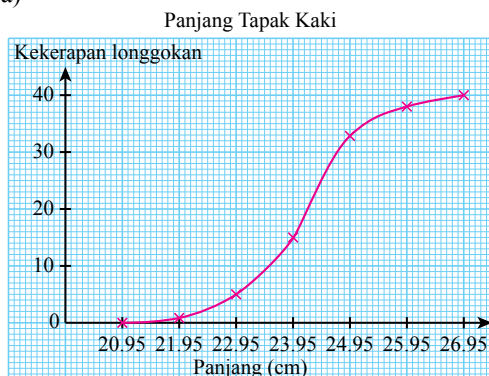
Latih Kendiri 7.1c

- (a)



- (b) (i) kuartil pertama = 35
(ii) median = 44.5
(iii) kuartil ketiga = 55

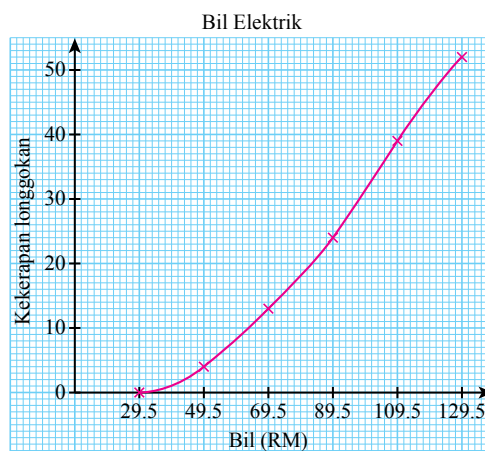
- (a)



- (b) (i) 23.35 (ii) 24.3
(iii) 25.1
(c) 70%

Latih Kendiri 7.2a

-



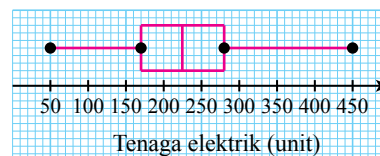
Julat = 80 bermaksud beza antara bil elektrik yang paling tinggi dengan bil elektrik yang paling rendah ialah RM80.

Julat antara kuartil = 40 bermaksud beza antara bil elektrik yang paling tinggi dengan bil elektrik yang paling rendah yang berada pada 50% bahagian tengah taburan ialah RM40.

- (a) Varians = 9.50; sisihan piawai = 3.08
(b) Varians = 266.91; sisihan piawai = 16.34

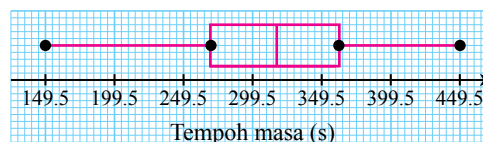
Latih Kendiri 7.2b

- (a)



- (b) Data mempunyai taburan yang sedikit pencong ke kanan.

- (a)



- (b) Data mempunyai taburan yang sedikit pencong ke kiri.

Latih Kendiri 7.2c

- Mesin P, min = 10.51, sisihan piawai = 1.33
Mesin Q, min = 11.65, sisihan piawai = 1.04

Mesin Q menunjukkan ketepatan yang lebih baik kerana minnya berada dalam julat dan sisihan piawainya lebih kecil menunjukkan mesin Q lebih konsisten.

2. Jenama X, min = 2.78, sisihan piawai = 1.12
Jenama Y, min = 2.1, sisihan piawai = 1.19
Bateri jenama X kerana minnya lebih besar menunjukkan baterinya lebih tahan lama dan sisihan piawainya lebih kecil menunjukkan jenama X lebih konsisten.

Latih Kendiri 7.2d

1. (a) Tidak kerana kebanyakan paras gula tertumpu pada kanan histogram iaitu nilai yang lebih tinggi.
(b) Min = 6.82, sisihan piawai = 1.35
(c) Sisihan piawai bagi bacaan gula dalam darah antara 6.0 mmol/L hingga 8.9 mmol/L adalah lebih rendah kerana serakan datanya yang lebih kecil.
2. (a) Min dan julat bagi pasar raya P dan Q adalah sama, iaitu min 32 dan julat 14.
(b) Taburan harga beras di pasar raya P lebih simetri kerana nilai min dan median adalah sama, dan median adalah di tengah-tengah julat antara kuartil.
(c) Julat antara kuartil bagi pasar raya P lebih besar daripada pasar raya Q dengan nilai median di tengah-tengah. Manakala, julat antara kuartil bagi pasar raya Q lebih padat dengan nilai median sama dengan kuartil ketiga.

Latih Ekstensif

1. (a)

Had bawah	Had atas	Titik tengah	Sempadan bawah	Sempadan atas
10	14	12	9.5	14.5
15	19	17	14.5	19.5
20	24	22	19.5	24.5
25	29	27	24.5	29.5
30	34	32	29.5	34.5

- (b)

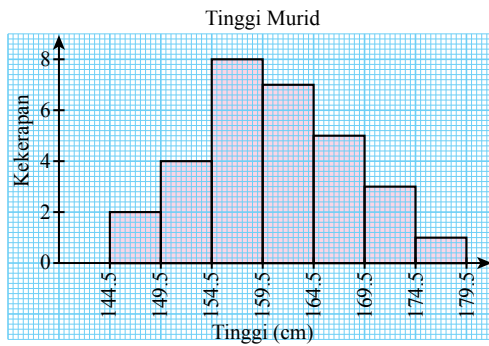
Had bawah	Had atas	Titik tengah	Sempadan bawah	Sempadan atas
25.0	25.9	25.45	24.95	25.95
26.0	26.9	26.45	25.95	26.95
27.0	27.9	27.45	26.95	27.95
28.0	28.9	28.45	27.95	28.95
29.0	29.9	29.45	28.95	29.95

- (c)

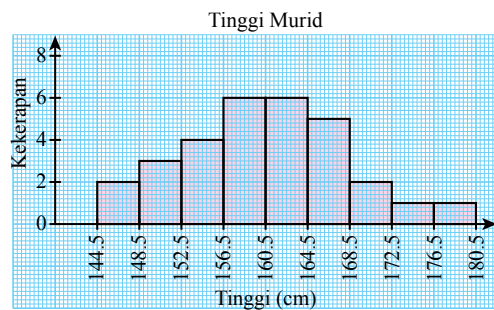
Had bawah	Had atas	Titik tengah	Sempadan bawah	Sempadan atas
0	0.24	0.12	0	0.245
0.25	0.49	0.37	0.245	0.495
0.50	0.74	0.62	0.495	0.745
0.75	0.99	0.87	0.745	0.995

2. (a) Ogif
(b) Histogram
(c) Poligon kekerapan
3. (a) C
(b) D
(c) A
(d) B
4. (a)

Tinggi (cm)	Sempadan bawah	Sempadan atas	Gundalan	Kekerapan
145 – 149	144.5	149.5	//	2
150 – 154	149.5	154.5	////	4
155 – 159	154.5	159.5	### ///	8
160 – 164	159.5	164.5	### //	7
165 – 169	164.5	169.5	###	5
170 – 174	169.5	174.5	///	3
175 – 179	174.5	179.5	/	1

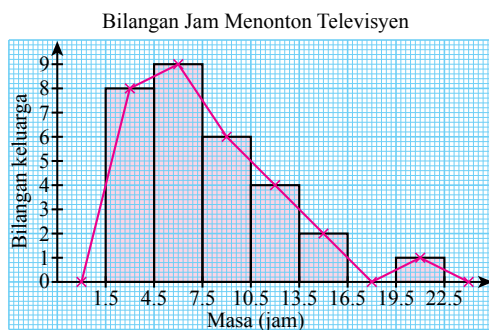


(b)



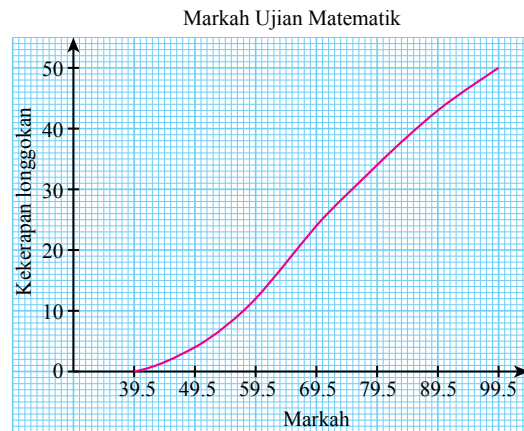
(c) Histogram (a) kelihatan sedikit pencong ke kanan dengan bilangan maksimum murid mempunyai ketinggian dalam julat 155 hingga 159 cm. Histogram (b) hampir bentuk simetri dan mempunyai dua mod ketinggian yang bertabur antara 157 hingga 164 cm. Ini menunjukkan bentuk taburan data sangat bergantung kepada saiz selang kelas data terkumpul yang digunakan.

5. (a)



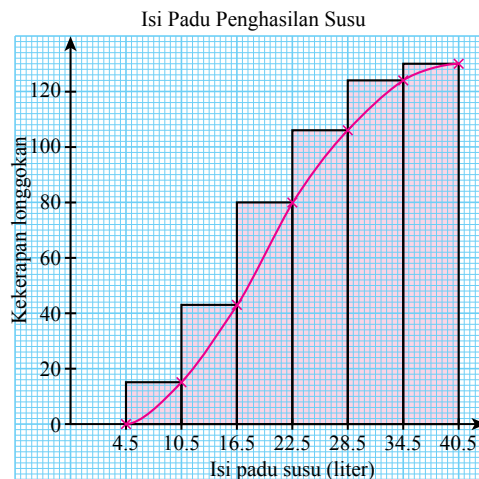
(b) Taburan data ialah pencong ke kanan dengan kebanyakan mereka menonton kurang daripada 7 jam seminggu.

6.



- (a) 50
 (b) 23
 (c) $P_{40} = 66.5$, $P_{80} = 86$

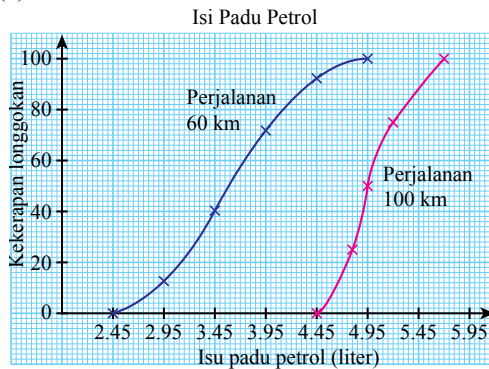
7. (a), (b)



Anggaran julat antara kuartil = 11.7 liter

8. Sebelum, min = 151.6, sisihan piawai = 15.23
 Selepas, min = 142, sisihan piawai = 13.42
 Ya, kerana min selepas mengambil ubat tersebut turun daripada 151.6 mmHg kepada 142 mmHg dengan sisihan piawainya juga lebih kecil.
9. (a) Rozaidy: 25%, Wildan: 45%
 (b) Prestasi Wildan lebih baik kerana nilai median dan kuartil ketiganya lebih tinggi daripada Rozaidy.

10. (a)



(b) Dengan andaian bahawa kereta tersebut mempunyai persentil yang sama bagi perjalanan 60 km dan 100 km, kereta tersebut akan menggunakan 5.00 liter petrol bagi perjalanan 100 km.

BAB 8 Pemodelan Matematik

Latih Kendiri 8.1a

- (a) Dalam masalah ini, kita mengetahui kelajuan arus sungai dan masa perjalanan di antara dua tempat di tebing sungai. Kita perlu mencari kelajuan bot di atas air tenang.
- (b) Andaian yang perlu dibuat:
 - Kelajuan arus sungai dan kelajuan bot tidak berubah sepanjang masa.
 - Kesan geseran antara permukaan bot dengan air sungai dan rintangan angin yang boleh memberi kesan kepada kelajuan sebenar bot diabaikan.
 Pemboleh ubah yang terlibat ialah v untuk kelajuan bot, t untuk masa perjalanan dan s untuk jarak di antara dua tempat di sepanjang tebing sungai.

Latih Kendiri 8.1b

- Panduan:
 - Pelari maraton berlatih mengikut rutin untuk berlari 32 km seminggu dan dia bercadang menambahkan jarak lariannya sebanyak 10% setiap minggu. Terbitkan satu model matematik bagi jarak lariannya, $D(x)$.
 - Andaikan pelari maraton menambah jarak lariannya tepat 10% setiap minggu dan dia tidak menghadapi kecederaan daripada lariannya.

- Pemboleh ubah yang terlibat ialah D untuk jarak larian dalam km dan x untuk bilangan minggu latihan.
- Bina jadual seperti berikut:

Minggu	Pengiraan (km)	Jarak larian (km)
1	$32 + 32 \times 0.1$ $= 32(1 + 0.1)$	$32(1.1)$
2	$32(1.1) + 32(1.1) \times 0.1$ $= 32(1.1)(1 + 0.1)$	$32(1.1)^2$
3	$32(1.1)^2 + 32(1.1)^2 \times 0.1$ $= 32(1.1)^2(1 + 0.1)$	$32(1.1)^3$
4	$32(1.1)^3 + 32(1.1)^3 \times 0.1$ $= 32(1.1)^3(1 + 0.1)$	$32(1.1)^4$

- Model matematik ialah $D(x) = 32(1.1)^x$. Model matematik ini merupakan suatu fungsi eksponen yang membolehkan pelari itu menghitung jarak lariannya selepas x minggu berlatih.
- Model matematik tersebut merupakan pengiraan untuk jarak larian dengan pertambahan 10% setiap minggu. Jika pelari itu ingin bermula dengan s km larian rutin dan menambah jarak lariannya sebanyak $r\%$ bagi setiap minggu yang berikutnya, maka model matematik itu boleh diubah suai menjadi $D(x) = s\left(1 + \frac{r}{100}\right)^x$.

2. Panduan:

- Mengapa anak kecil mempunyai risiko yang lebih tinggi mengalami hipertermia berbanding dengan orang dewasa di bawah cuaca panas?
- Kadar kehilangan cecair daripada badan bergantung pada luas permukaan badan seseorang.
- Kuantiti cecair di dalam badan bergantung pada isi padu badan.
- Faktor utama ialah nisbah jumlah luas permukaan per isi padu. Nisbah jumlah luas permukaan per isi padu yang lebih besar akan menyebabkan badan kita kehilangan cecair dengan lebih cepat.
- Kubus digunakan untuk mewakili badan kita.
- Pemboleh ubah yang terlibat ialah y untuk nisbah jumlah luas permukaan per isi padu dan x untuk panjang sisi kubus.
- Pertimbangkan kubus yang berlainan saiz.

Panjang sisi kubus (unit)	Jumlah luas permukaan (unit ²)	Isi padu (unit ³)	Jumlah luas permukaan Isi padu
1	6	1	6
2	24	8	3
3	54	27	2
4	96	64	1.5
5	150	125	1.2
6	216	216	1
7	294	343	0.86

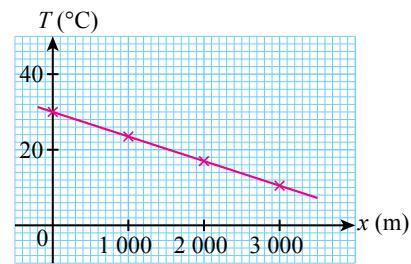
- Model matematik ialah $y = \frac{6}{x}$ dengan keadaan $y =$ nisbah jumlah luas permukaan per isi padu dan $x =$ panjang sisi kubus. Model matematik ini merupakan suatu fungsi salingan.
- Kubus kecil mempunyai nisbah jumlah luas permukaan per isi padu yang lebih besar berbanding dengan kubus besar. Kubus kecil mempunyai potensi yang lebih besar untuk kehilangan cecair. Kubus kecil akan kehilangan cecair pada kadar yang lebih cepat daripada kubus besar.
- Dengan ini, kita boleh menyatakan bahawa anak kecil akan kehilangan cecair badan lebih cepat daripada orang dewasa. Jadi, mereka mempunyai risiko yang lebih tinggi mengalami dehidrasi yang kemudian menyebabkan hipertermia.
- Kita boleh lanjutkan pendekatan nisbah jumlah luas permukaan per isi padu bagi kubus kepada pembinaan model fizikal anak kecil dan orang dewasa dengan menggunakan kubus, kuboid, silinder, kon atau sfera.

Latih Ekstensif

- Mengenal pasti dan mendefinisikan masalah, membuat andaian dan mengenal pasti pemboleh ubah, mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah, menentukan dan mentafsir penyelesaian dalam konteks masalah berkenaan, memurnikan model matematik, melaporkan dapatan
- (a) A – model kuadratik ; B – model eksponen C – model linear
(b) Model eksponen. Suhu tidak seharusnya bertambah seperti yang ditunjukkan dalam model kuadratik. Suhu tidak seharusnya jatuh di bawah 0°C seperti yang ditunjukkan dalam model linear.

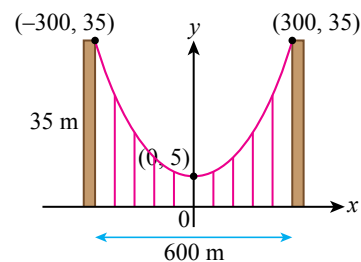
3. (a) $T = -(6.5 \times 10^{-3})x + 30$

(c)



- (d) Daripada graf, apabila $x = 4\,000$, $T = 4$. Julat bagi fungsi $T(x)$ ialah $4^\circ\text{C} \leq T(x) \leq 30^\circ\text{C}$. Tinggi Gunung Kinabalu adalah lebih kurang $4\,000$ m.
- (e) Kecerunan $= -6.5 \times 10^{-3}^\circ\text{C}$ per m. Hal ini bermakna bagi setiap meter kenaikan, terdapat penurunan suhu sebanyak 0.0065°C .
- (f) Pintasan- $y = 30^\circ\text{C}$. Hal ini bermakna suhu pada paras laut (altitud 0 m) ialah 30°C .
- (g) Ya. Suhu berkurangan pada kadar linear apabila altitud bertambah bagi troposfera memandangkan hubungan antara T dengan x ialah suatu fungsi linear.

4. (a) $y = \frac{1}{3\,000}x^2 + 5$



(b) 58

(c)

Jarak di antara kabel menegak (m)	Jenis bahan kabel	Jumlah kos kabel menegak (RM)
15	A	848 250
20	B	831 400
25	C	781 920

(Panduan: guna hamparan elektronik untuk membuat pengiraan panjang setiap kabel menegak yang diperlukan.) Jenis bahan kabel C dengan jarak di antara setiap kabel menegak berturutan ialah 25 m harus digunakan.



bulatan unit (*unit circle*) Bulatan yang mempunyai panjang jejari 1 unit.

cukai (*tax*) Bayaran yang dikenakan oleh kerajaan terhadap individu atau syarikat untuk pembangunan negara.

cukai jalan (*road tax*) Cukai yang dikenakan terhadap pengguna jalan raya yang memiliki kenderaan.

cukai jualan dan perkhidmatan (*sales and service tax*) Cukai jualan dikenakan sekali sahaja atas pelbagai barangan bercukai pada peringkat pengeluaran atau pengimportan manakala cukai perkhidmatan dikenakan terhadap pengguna yang menggunakan perkhidmatan bercukai.

cukai pendapatan (*income tax*) Cukai yang dikenakan atas pendapatan yang diperoleh oleh seseorang individu bergaji atau sesebuah syarikat.

cukai pintu (*property assessment tax*) Cukai yang dikenakan kepada semua pegangan atau harta tanah untuk membiayai kos penyelenggaraan bandar.

cukai tanah (*quit rent*) Cukai yang dikenakan terhadap pemilik tanah.

deduktibel (*deductible*) Sebahagian kerugian yang perlu ditanggung oleh pemegang polisi sebelum layak membuat tuntutan daripada syarikat insurans.

faktor skala (*scale factor*) Nisbah antara panjang sisi sepadan imej dengan panjang sisi objek di bawah suatu pembesaran.

histogram (*histogram*) Graf yang mewakili kekerapan setiap selang kelas dengan segi empat tepat yang lebarnya sama dan tingginya mewakili kekerapan.

insurans am (*general insurance*) Polisi insurans yang melindungi pemegang polisi selain kerugian atau kerosakan yang dilindungi oleh insurans hayat.

insurans hayat (*life insurance*) Sesuatu perjanjian yang menjamin pembayaran sesuatu manfaat kewangan pemegang polisi kerana kematian atau di bawah keadaan yang ditetapkan dalam kontrak.

kekerapan longgokan (*cumulative frequency*) Hasil tambah kekerapan dan jumlah semua data atau selang kelas sebelumnya.

kekongruenan (*congruency*) Objek yang sama bentuk dan sama saiz.

keserupaan (*similarity*) Pasangan bentuk yang mempunyai sisi sepadan berkadaran serta sudut sepadan yang sama.

ko-insurans dalam insurans harta (*co-insurance in property insurance*) Pemegang polisi menginsuranskan harta pada suatu jumlah tertentu berdasarkan peratusan yang ditetapkan oleh syarikat insurans daripada nilai boleh insurans harta itu.

ko-insurans dalam insurans perubatan (*co-insurance in medical insurance*) Pemegang polisi menanggung sebahagian daripada kos perubatan yang dilindungi polisi mengikut suatu kadar yang dipersetujui.

matriks (*matrix*) Nombor-nombor yang disusun dalam baris dan lajur untuk membentuk satu tatasusunan segi empat tepat atau segi empat sama.

matriks identiti (*identity matrix*) Matriks segi empat sama yang apabila didarabkan dengan sebarang matriks yang lain akan menghasilkan matriks itu sendiri.

matriks sifar (*zero matrix*) Matriks dengan semua unsurnya adalah sifar.

matriks songsang (*inverse matrix*) Matriks A ialah matriks songsang bagi matriks B jika hasil darab kedua-dua matriks itu ialah matriks identiti, I iaitu $AB = BA = I$.

ogif (*ogive*) Graf kekerapan longgokan.

pemalar (*constant*) Nilai sesuatu kuantiti yang tetap atau tidak berubah.

pembesaran (*enlargement*) Transformasi dengan semua titik objek bergerak dari satu titik tetap dengan satu nisbah malar.

pemodelan matematik (*mathematical modeling*) Menggunakan pendekatan matematik untuk memahami dan membuat keputusan tentang fenomena kehidupan harian.

peringkat matriks (*order of a matrix*) Matriks peringkat $m \times n$ ialah matriks yang mempunyai m baris dan n lajur.

poligon kekerapan (*frequency polygon*) Graf yang menyambungkan titik tengah selang kelas pada hujung setiap segi empat tepat dalam sebuah histogram.

rebat cukai (*tax rebate*) Amaun yang diberikan untuk mengurangkan jumlah cukai pendapatan yang perlu dibayar.

risiko (*risk*) Kemungkinan berlakunya musibah yang tidak dapat dielak.

teselasi (*tessellation*) Pola bagi bentuk berulang yang memenuhi suatu satah tanpa ruang kosong atau pertindihan.

ubahan (*variation*) Hubungan antara dua atau lebih pemboleh ubah.

ubahan bergabung (*combined variation*) Ubahan yang melibatkan gabungan ubahan langsung atau ubahan tercantum, dan ubahan songsang.

ubahan langsung (*direct variation*) Ubahan yang menghubungkan dua pemboleh ubah x dan y dengan keadaan y bertambah (berkurang) apabila x bertambah (berkurang) dan $\frac{y}{x}$ ialah pemalar.

ubahan songsang (*inverse variation*) Ubahan yang menghubungkan dua pemboleh ubah x dan y dengan keadaan y bertambah (berkurang) apabila x berkurang (bertambah) dan xy ialah pemalar.

ubahan tercantum (*joint variation*) Ubahan langsung yang menghubungkan tiga atau lebih pemboleh ubah dengan keadaan satu pemboleh ubah berubah dengan hasil darab dua atau lebih pemboleh ubah yang lain.

unsur (*element*) Setiap nombor dalam matriks.



- Bittinger, M., Ellenbogen, D. & Johnson, B. (2017). *Intermediate Algebra: Concepts and Applications*. United States: Pearson Education.
- Chow W.K. (2016). *Discovering Mathematics*. Singapore: Star Publishing Pte Ltd.
- Freedman, D., Pisani, R. & Purves, R. (2018). *Statistics*. New York, United States: WW Norton & Co.
- Goldie S. (2012). *Statistics*. London: Hodder Education.
- Hansen M. (2012). *Master Math: Business and Personal Finance Math*. Boston: Cengage Learning.
- Hendon Redzuan, Rubayah Yakob, Mohamad Abdul Hamid. (2006). *Prinsip Pengurusan Risiko dan Insuran*. Petaling Jaya: Pearson Malaysia Sdn. Bhd.
- Lim C.C. (2003). *Pengurusan Risiko dan Insurans*. Sintok: Penerbit Universiti Utara Malaysia.
- Malaysia. Dewan Bahasa dan Pustaka (2020). *Pusat Rujukan Persuratan Melayu*. <http://prpm.dbp.gov.my>
- Malaysia. Jabatan Kastam Diraja Malaysia. (2018). *Panduan Umum Cukai Jualan 2018*. <http://www.customs.gov.my/ms/pages/utama.aspx>
- Malaysia. Jabatan Peguam Negara. (2020). <http://www.agc.gov.my/agcportal/index.php?r=portal2>
- Malaysia. Lembaga Hasil Dalam Negeri Malaysia. (2018). *Risalah Cukai Pendapatan & Anda*. <http://hasil.gov.my>
- Malaysia. Lembaga Hasil Dalam Negeri Malaysia. (2020). <http://hasil.gov.my>
- Ridzuan. (n.d.). *Kanun Tanah Negara*. <http://tanahweb.wordpress.com/ktn/>
- Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2016). *Algebra and Trigonometry*. Ohio, United States: Cengage Learning, Inc.
- Sullivan M. (2012). *Algebra & Trigonometry Ninth Edition*. Boston: Pearson Education, Inc.
- Yeap B.H., Yeo J., Teh K.S., Loh C.Y., Chow I., Yeo Guoliang, Ting W.L. (2017). *New Syllabus Mathematics (Normal Academic) 5*. Singapore: Shinglee Publishers Pte Ltd.



- amplitud 187
 bulatan unit 174
 cukai jalan 100, 111
 cukai jualan dan perkhidmatan 102, 113
 cukai pendapatan 99, 104
 cukai pintu 101, 112
 cukai tanah 101, 112
 data selanjar 200
 data terkumpul 198, 201, 203, 207, 208, 211, 212
 deduktibel 85, 86, 87
 faktor skala 138, 139
 gabungan transformasi 150
 graf fungsi trigonometri 185
 had atas 199, 200
 had bawah 199, 200
 histogram 200, 204
 histogram longgokan 209
 insurans am 76, 77
 insurans hayat 76
 julat 211
 julat antara kuartil 211
 kalis agihan 47
 kalis sekutuan 47
 kalis tukar tertib 47, 155
 kekerapan longgokan 200
 kekongruenan 124
 kekongruenan segi tiga 127, 128
 keserupaan 133, 134
 ko-insurans 85, 87, 88
 kontrak insurans 75
 kosinus 186
 kuartil 207, 208
 matriks 36
 matriks baris 37
 matriks identiti 55, 56
 matriks lajur 37
 matriks segi empat sama 37
 matriks segi empat tepat 37
 matriks sifar 47
 matriks songsang 57, 58, 59, 60
 ogif 207
 pantulan 149
 pelepasan cukai 105
 pemalar 5, 6, 12, 20, 21, 27
 pembesaran 138, 149
 pemboleh ubah 3, 5, 6, 18, 19, 20
 pemegang polisi 75
 pemodelan matematik 228, 230
 penentu matriks 60
 pengecualian cukai 104
 penyiasatan statistik 219
 percukaian 96
 peringkat matriks 38
 perkadaran 5
 persamaan linear serentak 62
 persentil 209
 plot kotak 213
 poligon kekerapan 201, 202
 polisi 75
 potongan cukai bulanan 107, 108
 premium 75, 81, 82, 83, 84
 putaran 149
 rebat cukai 106
 risiko 74, 76
 saiz selang kelas 199, 200
 selang kelas 199
 sempadan atas 199
 sempadan bawah 199
 serakan 204, 205
 sinus 185
 sisihan piawai 212
 sudut rujukan sepadan 175
 sukatan serakan 211
 sukuan 174
 syarikat insurans 75
 taksiran cukai berasingan 109
 taksiran cukai bersama 109
 tangen 186
 tempoh fungsi trigonometri 187
 teselasi 161
 teselasi jenis Escher 164, 165
 titik tengah 199
 transformasi tunggal 157, 158
 translasi 149
 ubahan bergabung 26, 27
 ubahan langsung 3, 5, 6
 ubahan songsang 18, 20, 21
 ubahan tercantum 11, 12
 unsur 38, 39
 varians 212

Dengan ini **SAYA BERJANJI** akan menjaga buku ini dengan baik dan bertanggungjawab atas kehilangannya, serta mengembalikannya kepada pihak sekolah pada tarikh yang ditetapkan.

Skim Pinjaman Buku Teks

Sekolah _____

Tahun	Tingkatan	Nama Penerima	Tarikh Terima

Nombor Perolehan: _____

Tarikh Penerimaan: _____

BUKU INI TIDAK BOLEH DIJUAL

RM9.30

ISBN 978-967-2930-12-9



FT085002